史上最强脑力操

让你大开眼界的数学书

轰动欧洲的“数学魔法师”倾力之作！

为你揭开日常生活背后的数学原理

找到数字之间的规律并运用它们

［英］安德鲁·杰弗瑞◎著

张宇征　张波◎译

BE A WIZARD WITH NUMBER

新世界出版社
NEW WORLD PRESS

VISIT...

LANZAROTE Caliente.COM

目录 Contents

前言

第一章 关于数字的一些秘密

第二章 聪明的算法

第三章 探秘数字之间的关系

第四章 日常生活中的数学

第五章 数字：我们真的能相信它们吗？

第六章 数字的奇迹

答案

图书在版编目（ＣＩＰ）数据

史上最强脑力操：让你大开眼界的数学书／(英) 杰弗瑞 (Jeffrey,A.) 著；张宇征, 张波译. -- 北京：新世界出版社，2011.10（2012.2重印）

ISBN 978-7-5104-2039-9

I. ①史… II. ①杰… ②张… ③张… III. ①数学 -

普及读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第159646号

北京版权保护中心外国图书合同登记号：01-2011-3475

All Rights Reserved

Copyright © Duncan Baird Publishers 2009

Text Copyright © Andrew Jeffrey Artwork illustrations Copyright © Duncan Baird Publishers 2009

Arranged through CA-LINK International LLC

史上最强脑力操: 让你大开眼界的数学书

作 者：〔英〕安德鲁•杰弗瑞（Andrew Jeffrey）

译 者：张宇征 张 波

责任编辑：刘 媛

校 对：张海霞

责任印制：李一鸣 刘社涛

出 品：北京阳光博客文化艺术有限公司

出版发行：新世界出版社

社 址：北京西城区百万庄大街24号（100037）

发 行 部：（010）6899 5968 （010）6899 8733（传真）

总 编 室：（010）6899 5424 （010）6832 6679（传真）

http://www.nwp.cn http://www.newworld-press.com 版 权 部：+8610 6899 6306

版权部电子信箱：frank@nwp.com.cn

印 刷：大厂回族自治县彩虹印刷有限公司

经 销：新华书店

开 本：880×1230 1/32

字 数：100 千字 印张：4.75

版 次：2011年10月第1版 2012年2月第2次印刷

书 号：ISBN 978-7-5104-2039-9

定 价：18.00元

版权所有，侵权必究

凡购本社图书，如有缺页、倒页、脱页等印装错误，可随时退换。

客服电话：（010）6899 8638

数字统领宇宙。

—毕达哥拉斯（Pythagoras，公元前570～前490）

前言

数学是一门艺术，科学和语言的综合体，这种特质唯有音乐能与之媲美。这既让数字的世界充满吸引力，又让很多人对它望而却步—无从发现它的力量、美妙和振奋人心的一面。

不能……还不能？

我毫不犹豫地答应本书的编写工作，是因为本书的主旨和我一直秉承的数学学习理念相当一致。人们常常认为现在爱上数学太晚了—如果你在学校里学习数学遇到困难，大概就会认为这辈子都学不好了。你甚至给自己找借口说学不好数学是因为天生对数字不敏感（这种情况确实存在，但它绝不是你学不好的原因）。我已经记不清有多少人对我说数字对他们是一种折磨了—而这往往是学校教授数学的方法不当引起的。如果我们没有抓住事物的本质，确实就会遇到很多困惑。不过现在开始一点也不晚。我相信这本书会让你体会到数字的绝妙乐趣。

本书的目的是用一些让人惊讶的简单方法帮你重建对数学的信心并充分享受它。比如，你能数到1000吗？你数过吗？如果你对第一个问题的答案是“能”，而第二个答案是“没有”，那么我要接着问你了：你为什么对自己没做过的事情这么肯定？我想是你在潜意识里了解数字的规则。而它们之间的关联关系正是数字的核心所在。一个看起来让人迷惑的法则一旦被掌握，在使用时就会变得非常容易。所以，你不必害怕自己尚未掌握的东西。

数字的魔力

你会在本书中会发现很多规律，发现规律并进行推理是你应该掌握的一项核心能力。简单的例子：

红、黑、红、黑、红、黑、红、黑、红、黑

下一个颜色是什么？

第100个颜色呢？

当然是黑色，但你是怎么知道的？因为100是个偶数，而每个偶数位置都是黑色。如果按这种方式推理，你已经在用数学的方式思考问题了。尽管这只是个简单的小例子，但它蕴涵一个普遍事实：一旦总结出规律，我们有能力预测出数列后面更多的颜色，比如第1286295项必然是红色。（奇数项）

根据规律有绝对把握做出预测是数学的力量与美妙之所在。正如爱因斯坦所说："数学以它独特的方式展现逻辑的诗意。"

作为一个职业魔术师和一个近期欧洲学校普遍承认的"数学魔法师"，我一直享受着数学世界里的种种魔法。在我20年的教学生涯中，我经常用变戏法的方式让我的学生们去探索新的数学概念。这些课程的教学效果出奇地好，孩子们能够轻松地掌握一些很难的概念。这些方法无疑也能帮到你，使你成为一个真正的数学魔法师。在本书当中，我为你准备了几个数字小魔法，可以在你的朋友和家人中试试。

数字在现实中的相关应用

书中这些窍门、难题和练习都是为了检测和加深你对数学的理解。希望你在开始解决问题的时候会发现，以前你觉得很难的问题，不过是你所掌握知识的延伸罢了。

举例来说，如果你会用10和2加、减、乘、除，你便会发现日常生活中的很多问题你都可以心算。当你购物、去银行或在其他用到数字的时候，你不必在给服务员小费时尴尬地掏出计算器，或者对一桩买卖是不是像听上去那么合算感到迷惑。

你也会遇到一些让人惊讶的事实：比如在零出现以前人们如何运算，如何计算雪花不确定的周长，或者什么时候不能相信你的计算器。

有一种教育观点认为，“我长大以后，永远也不需要用到这些数学知识”，尽管它听起来有些道理，但你会发现，数字在生活的各个领域中都有深远影响。数字真的无所不在。政治家和市场专家经常试图用统计学的理论说服我们，或者证明他们的决定是正确的。当你看到第五章时，你会发现数字在如何影响整个世界。

我希望这本书不仅可以帮助到希望克服数学困难的读者，也可以激发数学爱好者更强烈的探索欲望，在数学世界的羊肠小路上发现一些新的有趣的现象。我在探索的过程中，经常会拾起一些已经被遗忘的事实和窍门，获得一些新知，或者发现曾经坚信的一些事情未必完全正确。希望你们也可以分享这种体验。

好吧，就让我们一起开始这次充满挑战、惊喜和激动人心的数学世界之旅吧！

第一章 关于数字的一些秘密

如果你在学校里有数学恐惧症，或者付小费和面对银行利率调整时不知所措，那可能是因为你对数字有莫名的恐惧。但由于它们的可预测性和稳定性，事实上，数字是非常令人放心的。比如，64×15永远等于960：结果并不会因为情绪或解释不同而有所变化。

本章会教你如何看待数字，并教你一些方法，让数字为你工作。

看清数字的本质

假设共有114名选手参加本年度的温布尔登网球公开赛男子单打比赛，赛制分为资格赛、淘汰赛、半决赛和决赛，问共需比赛多少场才能决出冠军？你会怎么算？

你可能会先算出第一轮比赛的总场次，然后再算出以后每轮的场次数相加。但这种算法会很烦琐而且容易出错。有个非常简单的解决方

案。先问你自己：最终目标是什么？让一人得冠军。这也就意味着将有113人被淘汰出局。既然每场比赛都有1人被淘汰，那么总共就需要113场淘汰赛。简单吧！

假设“我不能”是人类面对所恐惧的事物时正常的反应，尤其在面对数学时更是如此。老师教授数学时有很多不同的方式，以致我们对数学概念的理解也千差万别。结果是，我们经常会有一些错误的理解，进而缺乏对数学的信心。由于我们的误解，数字和数学显得比它们看上去更难。即使是一些很聪明的人，有时面对数学时也会头脑一片空白（除了一些在学校学的毫无用处的法则以外）。你可以做到：别去想“我不会”，试试去想“现在我还没搞定，但是我可以搞清楚这些规则是怎么回事……”

让你大开眼界的数字题

这个小测验的与众不同之处在于，得到问题的答案并不是最重要的事情，重要的是你解决问题的方式：用计算器还是找到简便算法。在你解题时记录自己所用的方法，做完后分析所用的方法，这样会帮助你发现自己与数字相处得如何。祝你好运！记住：这个考试不需要你得满分—但会给你一个大大的惊喜！

1 23乘以99等于多少？

2 300除以1／3等于多少？

3 如果用$1cm^3$的立方体组成一个边长为7cm的立方体，共 需多少个？

4 农夫在每个箱子里装48个鸡蛋。如果共有472个鸡蛋，需要多少个箱子？

5 从1到20相加之和等于多少？

答案（最重要的是推导过程）：

1 2277。

如果你用乘法法则算对了，得3分。如果你试了但算错了，得2分。如果你发现可以用23×100－23的简便算法，奖励自己4分。

2 900。

如果你算的结果是100，这很正常：除法是很容易被误解的一个概念。也许最简单的一种理解可以是“分成多少份”。假设300个比萨，每个被切成3片，就很容易得出共有900片。只要你尝试了，得2分。如果用计算器算对了，得3分。如果没用计算器算对了，奖励自己4分。

3 343。

如果你想象的是需要有49个小立方体组成一个7×7的平面，并且知道需要7层组成一个大立方体，得3分。你是一个视觉学习者。如果你是用其他方法计算7×7×7，也得3分。如果你是用计算器得到正确答案，得2分。如果你努力了，但算错了，得1分。这个大立方体阐释了数学的原理—我们可以从非常简单的东西开始，然后一步步地构建我们的知识体系。

4 10个箱子。

如果你用计算器或笔计算472÷48得到这个答案，得2分。如果算错了，得1分。如果你回答9.83333，不得分：常识会告诉你，箱子的个数必须是整数。这道题说明了一个问题：由于缺乏对数字的信心，我们经常忘了问自己得到的答案是否符合常识。如果你想到了480个鸡蛋需要10个箱子，9个箱子肯定不够，奖励自己3分。

5 210。

如果你把数字按正序或倒序全部相加，算对了得2分，算错了得1分。如果你用了另一种更为简便的方法，即使算错了，也奖励自己4分。

算出你的总分

如果你的得分为0～6分，也许你没有试图找到每个问题的答案。原因可能是多方面的：缺乏信心，半途而废或是卡在某个步骤上。

对于错误的答案，我们也给分，是为了让你意识到这仅仅是个错误而已：一个错误的答案绝对好过没有答案。很多时候，我们不是因为尝试了而失败—我们失败，恰恰是因为我们不敢尝试。

如果你的得分为7～12分，可能你使用了一些学校里曾经教授的方法，但并不十分清楚这些方法是如何工作的，或者没有想到还会有更简便的方法能够解题。这本书将会帮你解决这些问题。你的分数也说明了你不怕尝试自己不确定的问题—非常好的信号！

如果你的得分为13～20分，你极有可能是一个横向思维者。你将会很享受后面章节为你提供的诸多迷人数学思路。

这种不同寻常的评分体系说明了尝试有多么重要，而且你解决问题的方法会对最终的结果产生多么不同的影响。寻找简便算法，弄懂题目真正问的是什么，不怕看起来很难的数学问题—这些技巧将会帮助你拨开数学的迷雾，变成一个真正的数学魔法师。

5、V 或者五

正如我们对人了解得越多，与其关系就会越深入；如果能从更多角度去了解数字，将会大大提高我们对它们的理解。如果我们对5的了解仅仅局限于“儿歌里面鸭子的个数”，在将来我们认识“5是10的一半”或者“500的1％”时就会有困难。这对有数字障碍的学习者是个好消息：从多个角度去了解数字会增强你运算的信心。

1、2、3、4、5、6这些符号本来没有任何意义，直到我们赋予它们数字的属性。一方面，相同的数字有不同的表示方法，如在标题中所示，数字5有现代西方、古罗马和中文中的不同符号。另一方面，同一个数字也会表示不同的意思：货币价值，时间，团队号码等。思考一下：

1 如果3与4对应，6与1对应，那么5与几对应？

2 下面哪个数与众不同？

60÷12；

5550.55 - 500.55;

12.5×40%;

10002 - 9997;

1小时44分28秒＋3小时15分32秒。

3 什么情况下5 = 41？（或者，再提醒一下，5什么时候等于 - 15）

数字的可预测性

也许理解数字最关键的因素之一，就是学会欣赏数字的排列方式和运算规则。一旦记住了，你就永远不会忘记。

数字之间的规律非常多，从极简单的到极复杂的都有。我们在此列举一些，它们将会大大改变你在学校所形成的思维定式。

- 任何整数乘以10，在数字后加个0即可；乘以100，加2个0；
- 如果一个数字的个位能被2整除，不论它有多少位，它都是偶数；
- 如果一个整数的个位是0或5，它必能被5整除；
- 两个奇数之和为偶数；
- 如果一个数的各位相加之和能被3整除，则此数必能被3整除；（这样你可以一眼看出287511能被3整除）

- 类似的，如果一个数的各位之和能被9整除，则此数必能被9整除；
- 如果一个数的末3位除以4后结果是偶数，则此数必能被8整除；
- 把一个数去掉末位后再减去末位数的两倍，重复以上步骤直到只剩一位数。如果剩下的是7、0或者 - 7，那么此数必能被7整除。

电话号码的花招

电话号码是可预测的。写下电话号码的后六位，先把它们重新排列，用较大的数字减去较小的，再把所得结果的各位数字相加，总和是不是27？绝大多数情况下都是这样的，有时会是18或36，更少数的时候会得9。不过答案永远都是9的倍数。比如731117：

把它重新排列组合成317171

731117

 - 317171

—

413946

4 + 1 + 3 + 9 + 4 + 6 = 27

数字读心术

别让你的朋友看见，在纸上写下37，然后把纸扣在桌面上。让他们做以下几步：

- 在计算器上按同一个数字3次，如555；

- 算出三位数的和（5 + 5 + 5 = 15）；
- 用这个数除以它各位数的和（555 / 15）。

让他们看你写下的数字。

这个小游戏的秘密就在于，所有3位数相同的数字都是111的倍数，而111 = 37 × 3。当你把三位数相加时，其实就是把个位数乘以3。所以当你把两个数相除时，已经得到了111，然后再除以3就得到37。

9的魔力

- 随便想一个数字，然后在脑子里把它乘以9。
- 在计算器上把你的答案乘以12345679。

计算器会显示一个9位数，每一位都是你所想的数字。

这是因为一个很少有人知道的规律：12345679 × 9 = 111111111。你所做的就是把自己想的数字乘以111111111。所以如果你想的是8，那么你会得到888888888。

速算天才

1784年，数学老师有点生气地发现在他布置作业的时候，七岁的高斯已经做完了。他决定给高斯出一道让他算一天也算不完的难题。

“高斯，今天回家以前你要算出1到100之间所有整数的和。算出来你就可以走了。”

“5050。”

“什么?”

”5050，不对么？”

“对，但是……好吧，你可以走了。”

那么，在计算器发明的几个世纪以前，高斯是如何做到的呢？

- 我们先想象把1到100从左到右写在一条纸带上。

- 然后再把1到100从右到左写在另一条纸带上放在它下面，这样1在100下面，2在99下面，依此类推。这样你就得到了100对数字，每对的和都是101。

- 所以两条纸带上所有数字的和就是$100\times101=10100$。

- 而我们只需要一条纸带上的数字之和即5050。

其实高斯只用了一行数字，在脑子里将它对折了一下。原理是一样的，不过视觉化这个过程要更难一些。

高斯（Carl Friedrich Gauss，1777—1855，德国数学家、天文学家和物理学家，被誉为历史上伟大的数学家之一，和阿基米德、牛顿齐名。—译者注）后来成为那个时代最著名的数学家之一。

数字模式

模式在数学中到处可见，很多生活中和数字有关的东西如数独、条形码、地图比例尺等，都出自乘法运算表、各种数列、拉丁方块和其他可预测的模式。理解模式背后隐藏的规律是学习数学的核心所在。

掌握模式

最简单的模式是自然数列1、2、3、4、5……正是由于理解了模式，我们才有信心毫无困难地数到1000或是1000000。模式有时可以以一种让人惊讶的方式协助运算，例如下面就是一些例子。

递增相等

别算出结果，你认为两组数字之和哪个更大？

16 + 17 + 18 + 19 + 20

还是

21 + 22 + 23 + 24？

你大概会有两种本能的思维方式：或者是第一个，因为它的数字个数更多；或者是第二个，因为它的每个数字更大。当然你也许会猜它们相等。它们实际上来自以下模式的扩展：

1 + 2 = 3

4 + 5 + 6 = 7 + 8

9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15

你能预测出第五行吗？

拉丁方块

方块里可以是数字或其他符号，规则是每行或每列的数字或符号不能重复。

[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

数独就是基于拉丁方块的一种智力游戏。它的流行说明了人脑对模式的浓厚兴趣。更多有趣的模式和数字间相互关系的例子如斐波纳契数列、圆周率、黄金分割和条形码。

数列

最常见的数列是等比数列，即每项以相等的差值递增或递减。例如：

4 7 10 13 16 19……

我们把4称为“第一项”，7称为“第二项”，依此类推。很多时候对推导出后续数字数列，比如第100项，还是很有用的。之所以能做到这点，是因为我们可以用一个通用项描绘出某个数列的所有项，这个通用项被称为“第n项”。

各项序号	1	2	3	4	5	6	n
3的倍数表	3	6	9	12	15	18	3n
数列	4	7	10	13	16	19	3n+1

我们可以看出这个数列相邻数字的差为3。3的倍数表也是这样，看来这个数列可能和3的倍数表很相似。将这个数列和3的倍数表比较后，我们发现：

最后一列尝试去归纳这个模式，对任何数字n，在“3的倍数表”中的第n项是n的3倍，也就是3n。而在“数列”中的第n项总是多1，也就是3n＋1。我们现在有100%的把握预测第100项是3×100＋1＝301。第200项是601，第30项是91等。找到通用项3n＋1，我们不用把数列全部写出，就可以快速准确地找到数列中的任何一项。

克服“乘法运算表恐惧症”

没有多少人喜欢乘法运算表，它包含一组数列，其第n项是从1n到10n。孩子们经常在完全理解它的意义前被要求背诵。那些能看出一些规律来的孩子会更容易记住。第一眼看上去，运算表有100个装满数字的格子。

实际上，如果我们发现该表格是沿对角线对称的，我们的任务就减少了一半—我们只需要记住一半，因为另一半是它的镜像。比如：4×7＝28，而7×4＝28，我们不需要把这个算式学两遍。另外，任何数字的1倍和10倍都非常简单，因此我们只剩下大约20个左右的数字需要记忆。

表格的秘密

这些格子也揭示了一些其他模式。如果你把奇数涂上阴影将会发现什么？这为什么会发生？看看表中对角线箭头所标识的数字—它是否解释了这些数字为什么被称为“平方数”？

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	65	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

更让人惊异的是，这个表格也是一个“分数转换器”。用任意两个格子里的数字，比如4和6，组成一个分数：4／6。从这两个格子出发，无论横向或是纵向，其他的数字对组成的分数完全相等，比如2／3，16

／24，20／30。表格显示，24／32和3／4，35／40和7／8的数值都是相等的。这个规律横向、纵向都适用。

上道了吗？

也许你在熟练掌握本章的内容之前要再熟读几遍。即便如此，你也要勇敢向前，试试下面的题目，看看你已经取得了哪些进展。本书后面的内容中每章节并没有小测验，但会给你提供很多有挑战性的题目让你运用学到的东西。

1 心算（别用计算器）：

a:34乘以99等于多少？

b:3.99乘以7等于多少？

2 心算：

a:150除以1/2等于多少？

b:200除以1/5等于多少？

3 奇数相加会有奇妙的效果：

1＋3＝4（2×2）

1＋3＋5＝9（3×3）

前100个奇数相加等于多少？

4 16变换数位是61，28变换数位是82。在什么情况下，16和61是相等的（并且28和82也相等）？

（如果你觉得听起来有点耳熟，那你就有点上道了！）

5 数列：

a: 7、11、15、19、23、27……的第100项是多少？

b: 在2、5、8、11、14……的数列中，146是第几项？

6 在一些报纸上，链式速算是很受欢迎的。看你能多快做完这两题？

开始 13	×11	+1	平方根	×99	10%	加倍	回答

开始 340	减半	再减半	1/5	×4	×5	回答

7 第三行格子中的五个数字是多少？为什么？

[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

第二章 聪明的算法

学习数学时有一个可能引起混乱的地方：老师教给我们在纸上的算法与我们大脑中的运算方式截然不同。这也许不是个大问题，但很多时候，当我们解决一些特定的复杂问题时，其实是有更简便的运算方法的。

本章将会帮助你更加自如地运用数字并教给你一些避免冗长运算过程的诀窍。

一学就会的心算技巧

一些简单的技巧可以让你的心算变得十分熟练。慢慢学习这些技巧，

你会发现自己对数字的信心，运算速度和准确率都大大提高。

加倍和减半

如果你知道每罐狗粮的价格，那么2罐、4罐和8罐分别是多少钱？一条裙子如果打5折后变成多少钱？在头脑中迅速地算出数字两倍或一半是训练头脑对数字敏感度的基础。

加倍

把数字加倍的秘诀在于学会把数字拆成几部分。你可以用自己认为最熟悉的方式拆。比如把3.47英镑加倍，你可以选择先加倍3英镑，然后是40便士，最后是7便士，就得到6英镑＋80便士＋14便士，也就是6.94英镑。或者你可以把3.47英镑看成3.5英镑减去3便士，这样你可以先加倍3.5英镑得到7英镑，再减去两个3便士，也得到6.94英镑。后一种技巧在有些商店里尤其有用，它们总是喜欢标价3.99英镑，让我们觉得价格是3英镑而不是4英镑！

加倍技巧的应用对比较大的数字也很有用，因为3000的2倍并不比3的2倍更难算。比如3462，我们可以把它想成6000800，再加124（记得你可以有不同的划分法），得到6924。

在今后几天每当你看到数字时都练习这个技巧：把它加倍，再加倍。经常想想一些简便算法。比如你可以在加倍26时把它变为加倍25（50）＋2。

减半

减半和加倍的原理不完全一样，但是很相似。即使8岁大的孩子也能掌握。

想象一条笔直的水平线在你眼前一米左右的位置。想象你想减半的数字在它的上方。按你觉得方便的方法把这个数分成两或三部分，放在

横线上方。记住你把哪部分放在哪儿，然后把每部分减半以后放在横线下方，最后把横线下的数字相加。比如把335减半；

300 30 5

---

150 + 15 + 2.5

总和：167.5

这个星期也好好练习这个技巧，你会发现自己的心算速度提高很快！

收获

一旦你能充满信心地把数字加倍或减半，你会发现一些看起来困难的任务忽然变得容易了。比如你可以轻易得出任何数字的4倍、8倍、16倍甚至32倍。如果有8个人吃饭，每人需要140克通心粉，总共需要多少？你会：乘2，乘2，再乘2就行了（280克、560克、1120克)。同理，通过重复减半，你可以算出任何数字的1/4、1/8、1/16。

你也可以用这个技巧做一些其他倍数的心算。比如你发现只有6个人来吃饭，把它想成2人加4人，所以为2人加倍（280克），为四人再加倍（560克），再相加就是280 + 560 = 840克。

关于100

想象你在纽约购物。你已经买了3样东西，分别花了1.99、2.98和4.99美元。你怎么算出总数呢？传统的算法如下：

$1.99

$2.98

+ $4.99

$9.96

但我们有更好的方法。它们的近似值是2、3、5美元，总和是10美元；差值是1、2、1美分，共差4美分，从总和中减去：10美元 - 4美分＝9.96美元。这种方法比笔算或计算器都快，你再试试3.99＋4.97＋2.98……

配对技巧

当几个数相加时，选取和为10或100的数字先配对相加。比如20 + 40 + 32 + 80 + 60。

传统算法：

20 + 40 = 60

60 + 32 = 92

92 + 80 = …?

我们可以找到更容易的方法：

20 + 80 = 100

40 + 60也是。

这就是200了，最后再加32就行：232。

把这个法则再进一步用在接近整数的数字上，比如把41、65、59相加，可以把41的1借给59，变成40和60就容易加了。很快你就能得到正确的结果：165。

试试心算23 + 34 + 56 + 27（按你觉得舒服的顺序相加）。

可怕的大数

一个通常的误解是大数都很难对付。我们可以用以下例子证明这种观点是错的。0.37、134、1000000三个数，你心算哪个数字乘以6最容易？别让自己被数字的长度吓倒，看看它到底是个怎样的数，你有没

有什么方法能简化它。

闪电般的11倍

如果你算一个数字乘以10或100比计算器快，没人会惊讶。但如果是11呢？来看看怎么做。

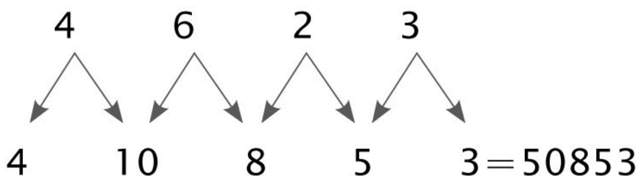
怎样最快求出23×11？你可以用23×10再加23，但更快的方法是把2和3相加之和放在2和3之间，即2 + 3 = 5，所以23×11 = 253。

如果两位数的和大于9，那么就往百位上进1，把和的个位数放在中间，例如

84×11：8（12）4 = 924

试试：34×11，52×11，69×11，85×11，93×11。

更大的数也可以用这个方法：



大数需要更多的练习，因为你要记住每一位，并且当和大于10时别忘记进位。不过这是一项对大脑很好的训练，熟练掌握后你就可以比计算器还快。

训练你的大脑肌群

数字游戏是一种很好的提升你已掌握技巧的方式。这里有几个小游戏，你也可以在报纸上、书上和其他地方找找看。第一步是理解方法的原理并尽量用最简便的方法做对，第二步是在不降低准确率的基础上提高解题速度。

链式速算

以下两个长链比较复杂—不过相信你可以心算出来。加倍，减半和整数配对法则都可能用得上。看看你用多久能算出答案。

开始 20	10%	×2	×12	−34	÷1 ×3	×1 ÷7	平方	×99	回答

开始 7	平方	×11	-439	平方根	20%	立方	平方	+6	回答

数列填空并填空。

Ⓐ

4	3	10
1	8	6
2	5	?

Ⓑ

2	3	10
4	3	14
?	3	12

Ⓒ

1	4	5
6	3	39
4	3	?

A

[illegible]

[illegible]

[illegible]

B

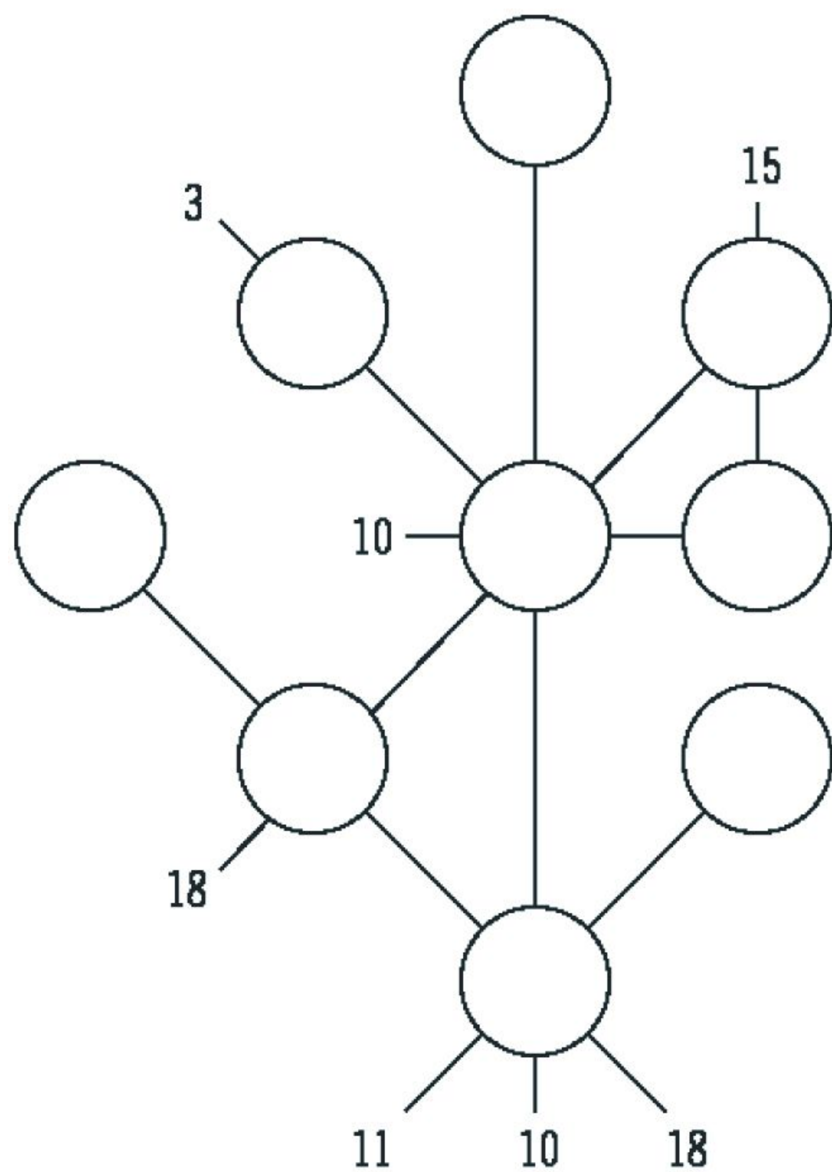
30
34
32

C

5
69
4

交叉线图

把数字1到9填入空白圆圈，使每条线上圈内数字相加之和等于线尽头的数字，数字不可重复使用。



数谜

你可能已经做过数独，这个游戏是数独的高级形式。不过与数独不同的是，除了逻辑推理能力，数谜还需要加减法的运算才能最终得出答案。

			16\	17\	14\			23\	24\
		18\18				25\	\16		
	9\28						\17		
\17				31\17			17\8		
\3			17\20						
		13\16			30\17			24\	16\
	24\31						\16		
\8			\17			16\	17\17		
\16	☆	☆	\34						
\11				\24					

你需要把数字1到9填入白色格子中。所填数字行列之和等于左侧或顶端的数字。任何一行或列中的数字不能重复。比如，最末一行左侧的两个格子要求其中的数字之和为11，其中第一格的数字和其上方格子的数字之和为24。

一种可能的解法从标记星号的两个格子开始。只有7 + 9才符合条件（8 + 8不可以，因为重复），不过是7、9还是9、7呢？前者把9填入和为13的那列，不过13 - 9 = 4，另外3格之和不可能为4。现在试着完成这个数谜。

经常进行数谜练习，你会发现自己的运算能力更为纯熟，并对数字组

合更为敏感，比如22 - 6 = 7 + 9，34 - （8 + 9）= 4 + 6 + 7。

“电”脑

计算器是个好东西—没有它，我们可怎么办？但是它也有缺点。我们怎么决定何时使用它，或者是否应该相信它告诉我们的一切答案？

计算器永远是对的吗？

通常情况下，计算器是运算的最佳工具，比如试试用纸和笔算出23587桶，每桶126.16美元的原油总价。但是使用计算器也有出错的可能，我把这称为“计算器依赖症”，因为它是机器，所以就一定正确吗？根本不是！你绝对比计算器聪明。看看下面的例子。

一个有关某条街家庭汽车保有量的调查：其中一个家庭有1辆车，其他9家每家有2辆。你可以立刻算出共有19辆车。用你的计算器试试：1 + 2×9，它显示的是27，明显错了！科学计算器知道我们的运算法则是先乘除后加减，但普通的计算器并不知道，所以它就按输入的顺序先计算1 + 2，然后乘以9。而你知道正确的方法是要先用2乘以9再加1。

这个计算错误是很明显的，但不管我们是否使用计算器，在进行一系列复杂运算时，我们还是经常会犯错误，比如加减百分比或分数。想想你该用什么顺序计算下列问题：

- 如果你知道一个电器的税后价格（税率15%），求它的原始价格？

- 如果你的老板先给你减薪10%，然后再加薪11%，这诱人吗？（实际上，你的工资减少了0.1%而不是增加了1%，你明白为什么吗？想想看两次变动分别是多少的10%和多少的11%。）

还有一个用计算器玩的小游戏。输入一个3位数，再输入一个一模一样的，你会得到一个6位数，比如237237。按“÷11”，你应该得到一

个5位数，然后再按“$\div 13$”，你会得到一个不确定的三或四位数，再按“$\div 7$”，你会发现得到的答案就是一开始的3位数！

这是为什么呢？因为$7\times 11\times 13=1001$。把一个数乘以1000，只需要在它后面加上3个零，所以它乘以1001就是重复一遍你一开始输入的3位数。

$237\times 1000=237000$

$237\times 1=237$

$237000+237=237237$

在以上过程中，除法消解了乘法的结果，所以除法就是乘法的逆向运算。

神奇的数字：6801

有很多神奇的“读心术”是这样开头的：“你在心里想一个数字……”这究竟是怎么回事？你也能“读心”吗？一旦对数字有了深刻了解，你就会让朋友们大吃一惊！

小游戏

- 写下任何一个三位数，确定各位数字都不相同；
- 再把这个数字的百位和个位对换位置，如259变为952；
- 用大数减去小数，你会得到一个3位数，如果差只有2位，在它前面加个0（比如37就变成037）；
- 把这个差的百位与个位互换，再把两个数相加，得到一个4位数；
- 现在是见证奇迹的时刻！把这页书倒过来，标题中的数字就是你的答案了！

原理

回想你在学校学过的“个十百位”的知识。假设你开始想的数字是348，然后变成843。

百十个

8 4 3

—3 4 8

———————

4 9 5

不管你选择的是哪个数字，有两个事实不会改变：减数的个位永远大于被减数（想想为什么会这样），而十位数相同，因此无论是怎样相减，都要从十位数借1，所以差的十位数永远是9，而且差的百位和个位之和也是9。当你进入第二步时就明白了：

百十个

4 9 5

———————

+5 9 4

两个数的百位与个位之和永远等于9（因为它们不过是对换了位置而已），而十位是两个9之和18：

9 18 9

当然，18的1要进到千位，得到：

1089

换算值

在我们换算货币或计量单位时，记住一些重要的换算值是至关重要的。比如旅游时的纪念品是否合算，或者公里和英里之间的转换……

我需要知道确切值吗？

有时候，准确的换算值是很重要的：你可不希望银行在为你兑换货币时只告诉你一个大概，或者你的药剂师给你开药时含含糊糊。不过，很多时候，你只需要记住一些实用、好记的比例，就能最快地得到想要的答案。

第四章会对估值有更详尽的介绍。在这里，我们将会介绍一些有用的换算值用于心算。无论是计算你的餐费、旅程远近，还是设想在国外买房的面积，这种技能都会对你大有帮助。

热还是冷？

摄氏和华氏单位在－40度时是一致的，这是一个很好的百科知识测试题。但在实际生活中，怎样更好地描述天气情况呢？你可能知道0摄氏度＝32华氏度，而这里有两个关键转换值：

16摄氏度＝61华氏度

28摄氏度＝82华氏度

记住这两个关键值，你会发现换算温度时不必通过可怕的换算表而轻松过关。

钱，钱，钱

与其记住准确的汇率，不如掌握一些有用的关键换算值。如果1兹罗提（波兰货币）值23欧分，那么1欧元就大约是4兹罗提，50欧元是200多兹罗提。有了这个概念，你就可以轻易判断在华沙一杯6兹罗提

的咖啡是不是敲诈，或者一条600兹罗提的裙子是否物有所值。

一个有趣的巧合

英里与公里体系中，一个最基本的换算是5英里 = 8公里。但是之后的换算却与斐波纳契数列惊人地相似。21英里大约是34公里，34英里大约是55公里等。把斐波纳契数列写两行，你就能得到英里和公里之间的换算表。

公里	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987
英里	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

传说中的斐波纳契

比萨的雷昂纳多（Leonardo Pisano，1175 - 1250，意大利数学家，西方第一个研究斐波纳契数列的人。—译者注），是12、13世纪著名的数学家，他在1202年发现的斐波纳契数列在很多情况下都让人惊异。

雷昂纳多和兔子

斐波纳契在研究兔子的繁殖速度问题时，发现了这个数列的规律。这个兔子的例子被沿用至今。

一对兔子从一个月大开始，每月生一对小兔子（一公一母），如果没有死亡的话，一年之后共有多少对兔子？斐波纳契发现一个月后有1对兔子，两个月后有2对兔子，三个月后有3对兔子，但是从四个月

后，兔子的增长速度明显提高：5对、8对、13对、21对……这个数列的一个显著的现象是每项都是前两项之和：

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144……

自然界中的序列

有关兔子繁殖的例子显然过于理想主义，但是斐波纳契规律在自然界有更多的例证，向日葵的花盘就是一个最著名的例子。它的种子螺旋形排列与斐波纳契一模一样：比如在内螺旋排在顺时针第21位的种子，与外螺旋逆时针顺序的第34颗种子相对；而外面一圈有88颗种子正向排列，55颗种子逆向排列。松果和其他很多贝壳花纹也有类似的规律。很多花的花瓣也是如此，比如毛茛、野玫瑰、金盏花、菊苣、紫苑，都是按5、8、13、21、34、55或89片花瓣排列的。

这个数列是个揭示数字间奇妙关系的好例子。正如我们都知道的，它也适用于英里与公里的换算。这两个度量体系的联系其实是黄金比例，我们会在下一章介绍。

第三章 探秘数字之间的关系

不同国家的人在讲述相同事物的时候，听起来大不相同，因为他们都在使用自己的语言。数学被认为是一种通用语言，但它也可以用不同的方式表示同一件事情。你会发现50%和0.5是“一半”的不同表示方法。

在本章当中，你会对分数有深入的了解；而且你也会学到，2可以用10、a或者x等不同的方法表示，并且学会深入了解数字间的相互关系，从而轻松地在生活中运用它们。

部分与整体

我们经常会被分数、小数和百分比弄晕，但这样的事情可以避免。这些概念并不是完全不同的事物，它们只是表述同样事物的不同方式：整体的某个部分。选择用百分比或小数有时可以让运算变得简单，重要的是记住它们只是分数的不同表述形式而已。

其他形式的分数

分数让我们对整体被平均分成的份数一目了然：1／16是16等份中的1份；3／4是4等份中的3份……因为我们学习的是十进制，所以10等份和100等份是很常见的，因此，有时用小数和百分比的形式表示十分方便，比如1／10即0.1或10％，1／100＝0.01或1％。

在一条代表整体或1的横线上等距标注后，我们会发现，相同的分数可以有不同的表示形式。



循环小数

你会发现，在上图的横线中，1／3和2／3没有用小数和百分比表示。把1／2变成小数很容易：1／2＝0.5，但你试试1除以3。

小数的局限性就是它只能表示十分位、百分位和千分位等确切数值的数字。你的计算器会把1／3显示为0.33333……但这并不是正确答案

—后面有无穷尽的3。不用计算器，你能写出1／9的小数表示法吗？

循环小数不全是单一重复的，有些会有一些有趣的循环现象出现，试试1／11、1／13、1／7、2／7、3／7。

为什么不一直用同一种格式？

我们经常以分数的形式思考和讨论问题，可能是比较直观的原因—我们可以轻易想象半个苹果，或者把蛋糕分成8块的情景。不过百分比的表示方法能更有效地表述整体被分为不均匀份数时的状况。设想一家商店的利润，按部门划分为：休闲装：1／4，儿童玩具：3／20，体育用品：2／5，男装：1／5，很难看出哪个部门的利润最高。但是如果把它们用百分比表示（25%、15%、40%、20%）则一目了然。

在进行加减运算时，小数也往往比分数容易，1.125＋3.4和11／8＋32／5哪个更容易呢？这是货币用小数表示的原因之一。百分比和小数往往能够把特定的分数表达得更为清晰。比如，设想一下某个数的14／25该是多少，把它当56%（56／100）看是不是就容易多了，或者说一半多一点。

百分比和百分比变化

百分比在描述工资或商品价格增减时更为清晰，这种比较经常表现为百分比的变化。

一个孩子从80厘米长到100厘米，他长了20厘米。如果想知道他长了百分之多少，只要用这个差值除以原始高度再乘以100就可以了：$20 \div 80 \times 100 = 25$，所以这个孩子长了25%。

讨论百分比的变化而不是具体的数字差值经常会产生一些有趣的效果，记者和政治家们很早就发现了这点。比如，去年1000个做心脏手术的人中有一人死亡，而今年有两人死亡。以任何标准看来，都不是很可怕的事实，但请看以下标题：

心脏手术死亡率上升100％！

这是事实，不过不是一种有用的解读。这种类似的误导性报道随处可见。要小心那些为了吸引眼球的百分比变化的例子，深入思考数字背后的东西将有助于你更好地了解事实。

对比一下……

有一种百分比的变化可以有效影响我们对相关数量的判断。比如你在去买车的路上顺便去买最爱吃的巧克力，你很生气地发现，每块巧克力从40美分涨价到1美元！所以你就绕路去另一家超市按原价买到了相同的巧克力。一会儿你注意到有个巨大的汽车广告牌子，上面的车正是你想要买的：原价12000美元，在半英里外的车库只卖11999.4美元。

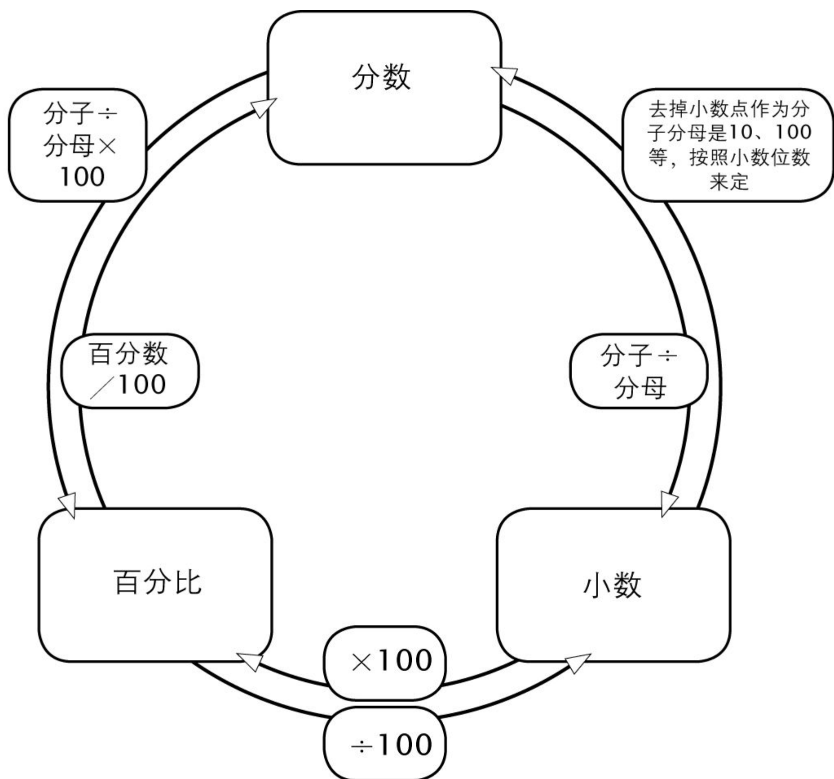
你一定不会绕路去买—谁会这样做呢，仅仅是为了省6毛钱？但那确实是你为巧克力做的！促使你做出不同决定的是百分比的变化：巧克力意味着150％的涨价，而汽车仅仅便宜了0.005%—不过1％的千分之五而已。

百分点

常见的错误是把百分点和百分比混淆，比如，一份金融报纸报导说透支利率升高了三个百分点，是说利率增加了三个点，可能是从6％到9％，也可能是从22%到25％。这和上升3％是截然不同的。

轻松变换

下面是数字的不同形式相互变换的简图。这么做不一定是最快的方法，但是绝对正确，没有例外。



例如：6.2是62 / 10；6.25是625 / 100。分数可以更简单，比如61 / 5和61 / 4。

心算百分比

心算百分比的诀窍在于把它分成容易记的几部分。这需要用到我们曾经学过的加倍和减半的各项技巧。（如果需要温习请见25~27页）

基本要素

最基本的百分比是10%。要想求出任何数字的10%，你只需要把它除

以10，或者把每位数字往右移一位（也就是把它的小数点向左移动一位）就可以了。例如：

26的10%：26÷10＝2.6

13.7的10%＝1.37

12340的10%＝1234

（严格地说是1234.0，通常可以去掉0）

求数字的1%，就是求10%的方法使用两次，例如:

26的1%＝0.26

6153的1%＝61.53

13.7的1%＝0.137

加倍和减半的技巧也让其他百分比的计算变得容易。50%当然是一半，求5%时，既可以先求10%再减半，也可以求50%的10%，如：

26的5%：10%＝2.6，减半是1.3

26的50%＝13，13的10%＝1.3

通过这些基本百分比元素的组合，你可以非常容易地算出任何其他百分比。如3000公里的60%是多少？

- 一种好方法：50%＋10%：1500＋300＝1800公里
- 另一种方法：算出10%（300公里）后乘以6。

3000公里的19%是多少？得动点脑筋了，但不用怕：

20%（10%的两倍），然后减去1%怎么样？

有个好消息。在学校里我们往往被要求用特定的方法去解题，但是随着你对数学信心的增长，你经常会发现有几种可选的方法，而你可以选择最适合自己的那种。心算百分比就是个很好的例证。如果求某数的16%，你可以先求出1%然后连续加倍4次；我会选择求出10%，

加上结果的一半（5%），然后再加1%；而另一个人可能会求10%，加倍，然后减去4个1%。但我们都能做对！

你怎么求：

- 一个数的75%？
- 48%？
- 17.5%？

一有机会就要练习—比如25%或33%的折扣，或者15%的服务费。

通过比例理解大数

通过比例的方法思考，有助于我们理解大数的意义。如果一个国家的人口大约是6000万，它的国民健康计划支出是750亿，那么我们可以用比例的方法求出人均健康计划支出：

6000万:750亿

等式两边同时约分得到：

6:7500 = 1:1250

所以人均支出为1250元。

试试自己去计算比例：

（1）查克的钟楼里有很多蝙蝠。他发现，每有30只棕色蝙蝠就有20只黑色蝙蝠。如果共有200只蝙蝠，其中有多少只是棕色的？

（2）90颗糖果会按威廉、托马斯和瑞贝卡的年龄分给他们，威廉5岁，托马斯6岁，瑞贝卡7岁，他们各自得到几颗糖果？（提示：算出1份是多少）

（3）血液是由血浆和各种血细胞组成的。健康的人体中血细胞约占血液的45%。那么血浆占多少比例？血浆和血细胞的比例是多少？（约分到最简比例）

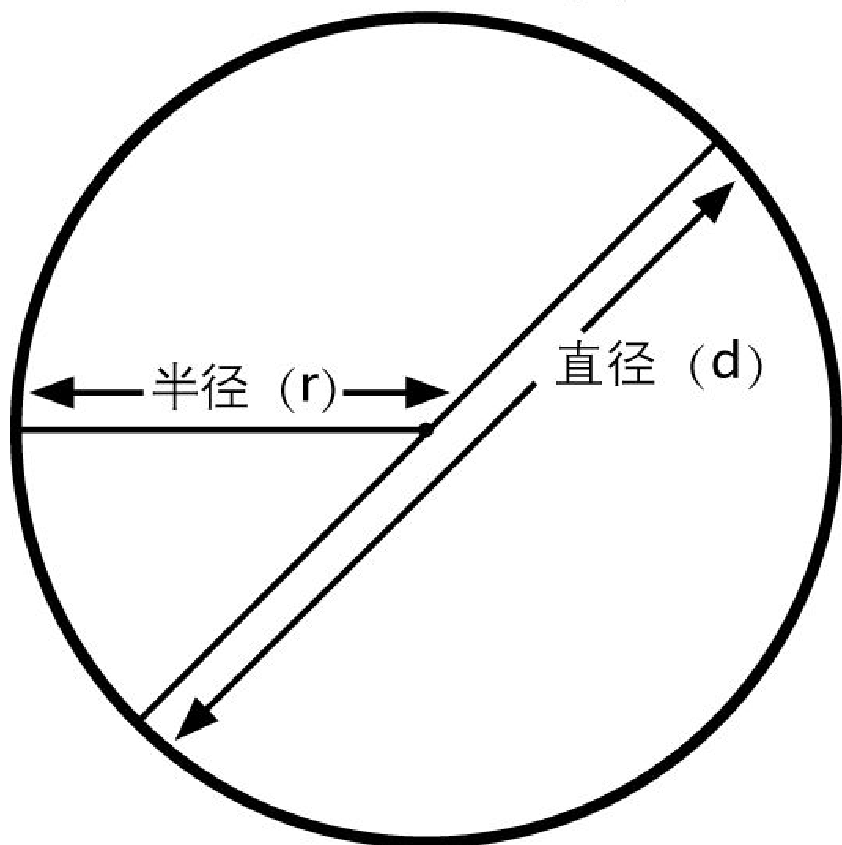
在你往下读以前，量量你信用卡的长和宽。用计算器算一下长除以宽，大概是1.6，这表示两边长的比例是1.6:1。这并非巧合！

一种特殊的关系：圆周率

圆周率（经常被写做希腊字母π）是几个世纪以来让数学家们兴奋不已的神奇数字。它也许是世界上最著名的无限不循环小数，即它永远不可能用小数准确表示。

尽管永远无法用小数准确表示，但它却代表了一个非常准确的关系：圆的直径和周长的关系。数学家们发现，不论圆的大小，用它的周长除以直径得到的值大约是3.14。一个有趣的游戏是：让一定数量的人手拉手围成一个圆圈，然后让1／3的人站成一条直线，就能组成这个圆圈的直径。

希腊人也发现可以通过半径的平方乘以π得到圆的面积。你也许还记得在学校的两个公式：面积$A=\pi r^2$；周长$C=\pi d$(或者$2\pi r$)。



3.14是π的近似值，它的前25位是3.141,592,653,589,793,238,462,643,3。计算机已经算到了它的第一万多亿位，但仍然没有终结。

来自爱因斯坦的帮助

如果你想背出π的前15位而在朋友面前露一手，爱因斯坦的话也许能帮到你：

“How I need a drink. Alcoholic, of course, after the heavy chapters

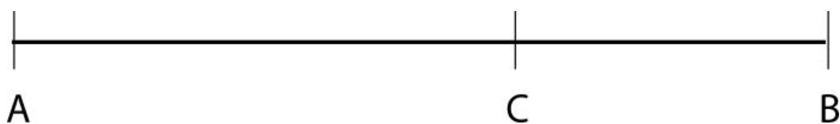
involving quantum mechanics.”数数每个单词的字母个数。

黄金比例

最早用希腊字母φ（phi）表示，黄金比例也被称为黄金分割，或者是神圣比例，因为它的可见的美感。古希腊数学家欧几里德发现了它，但我们对它的普遍认知是浅薄的，甚至完全错误！

什么是黄金比例？

比例即两个数量间的比较或关系。设想一个线段AB上有一点C，如果线段长度的关系AC: CB＝AB:AC，即称为黄金比例。



这个比例的确切数值是5的平方根加1的一半，也就是（1＋ 5 ）÷2，它是一个无限不循环小数。这个特质让它在自然和艺术领域都有重要地位。在我们进一步研究黄金比例之前，让我们先揭开一些对它的误解。

两个常见的错误

包括《达芬奇密码》的作者丹·布朗在内的很多人都认为黄金比例的确切值是1.618。但黄金比例是无限不循环小数，1.618只是个近似值。

人们也经常认为在古罗马、古希腊，乃至文艺复兴时代的建筑，有很多是受黄金比例的影响。这种观点有失偏颇。黄金比例确实能给人带来视觉上的美感，因此很多建筑和艺术作品中出现近似的比例让人愉悦也就不足为奇。比如，蒙娜丽莎的脸部长度和宽度就非常符合黄金比例。但是大多数情况是，艺术家们是为了使作品更具美感而创作

的，与黄金比例的相似只是巧合罢了。事实上，黄金比例这个词诞生于1835年。

美，使事物看起来是正确的。

—伊丽莎白·勃朗特·布朗宁（1806 - 1861）

黄金比例和斐波纳契数列

斐波纳契数列中相邻两项相除的数值（后项除以前项）约等于黄金比例的值：

1 ÷ 1 ＝ 1

2 ÷ 1 ＝ 2

3 ÷ 2 ＝ 1.5

5 ÷ 3 ≈ 1.6666

8 ÷ 5 ＝ 1.6

13 ÷ 8 ≈ 1.625

21 ÷ 13 ≈ 1.615

34 ÷ 21 ≈ 1.619

55 ÷ 34 ≈ 1.618

你也许注意到英里和公里的换算关系中，1英里约等于1.6公里，与黄金比例和斐波纳契数列都有惊人的相似之处。

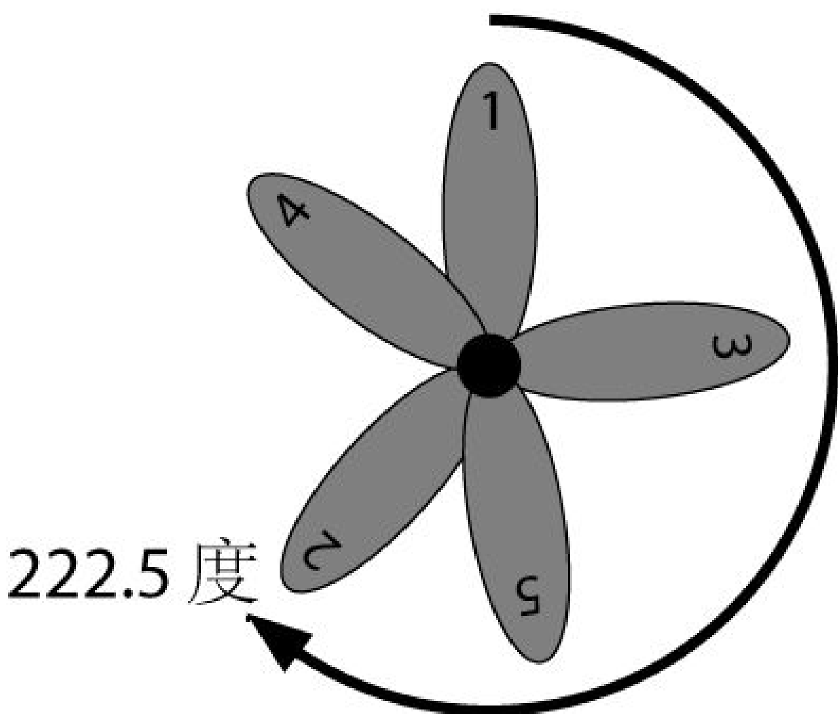
伊斯兰的几何艺术中，大量斐波纳契数字也被使用。艺术家们认为这种排列是神圣的，因为1／0.618≈1＋0.618, 而1是一个整体（或整个宇宙）。

黄金比例令人愉悦的视觉效果也被应用在大量日常生活中的长方形物品上，如电视、窗户、门廊、杂志、信用卡等。

自然界中的黄金比例

更令人称奇的是，在自然界中黄金比例和斐波纳契的数列随处可见。一个有趣的现象是叶子生长的角度。

当植物生长时，最理想的状况是新叶生长的角度与老叶有所不同，这样它们就不会遮蔽下端叶子所需要的阳光。不过最理想的角度是多少呢？假设是90度的话，那么第五片叶子就会和第一片重合。大自然知道用黄金比例来解决这个问题。很多植物的每片叶子都是绕茎1.618周生长的，也就是一周（360度）加上222.5度。这个角度符合黄金比例的法则，而它是个无限不循环小数，因此无论植物生长到什么时候，每片叶子都不会完全重合。



平均数的意义

我们都知道平均数，它们意味着中间点。但是它们可以由多种方法计算，而且不同的结果会导致误解和误用。

明显的错误阐述：

请看以下陈述：

“全国一半的儿童在数学方面的表现低于平均值！”（《时代》杂志文章标题）

“每个家庭平均有2.3个孩子。”

“绝大多数人的腿比平均值多。”

这些陈述在技术上是对的，但是一点用都没有，最后一条的表达方式简直令人发笑。总的来说，我们有三种方法求取平均值，因环境不同而选择不同。错误的方法选择会导致上述错误。

平均数、中数和众数

最常见的是算术平均值，即把所有数值相加然后除以总的项数。如2、6、7的平均值是5，2 + 6 + 7 = 15，15 / 3 = 5。但这个平均值并不能显示每个数字的特性，如 - 82、0、100和2的平均值也是5。正是算术平均值的显示使每个家庭有2.3个孩子的陈述在数学领域是对的，但在现实中不是。

另一种选择是算出中数，这在我们希望得知一个普通学生在考试中的表现时尤其有用。把学生们的分数按升序排列，在最中央位置的那个数就是中数。如果数列是偶数项，那么中数就是中间两项的平均值。既然一半的数字永远比中数小，中数的概念就让前文《时代》的标题变得正确，但无论孩子们的表现如何，永远有一半的孩子会比中数的表现差。

有时候，当我们希望计算流行程度或某些频率时，平均值和中数就无

法满足条件。设想一家市场调查公司希望了解众多家庭每年度假的情况。假设10个家庭的度假情况是：1、1、1、1、1、2、2、3、4、5。那么，最佳答案是什么呢？

平均数会显示：（1＋1＋1＋1＋1＋2＋2＋3＋4＋5）／10＝2.1。

中数会显示：1.5（第5项和第6项的平均值）。

但这两个数都不正确，因为没有人的假期不是整数！因此按出现频率最高的1来显示这些家庭的一般情况显得更为合理。这就是众数，或者叫众数平均值，在法文中它的意思是“流行的”，或“时尚的”。在我们刚才讨论的情况中，由于出现频率最高的数字是1，因此我们可以说大多数家庭每年的假期是1。

得分是……

由一群评委打分的平均值来决定选手分数的比赛是很主观的。如果有的评委偏心或有政治黑幕怎么办？有一种办法可以应付这种可能的情况：“条件平均分”，即去掉一个最高分和一个最低分以后再取分数的平均值，这样就可以避免个别评委过于偏激的评分对选手的影响。

我们要根据情况来选取平均数的计算方法。比如，人们的腿比平均值多，从平均数或中数的角度来说是对的—因为残疾人只有一条腿或者没有腿，所以平均值可能是1.99和2之间的某个值。但通常意义上的讨论应该是众数，即绝大多数人都有两条腿。

明智的决定取决于知识，而非数字。

—柏拉图（公元前428～347）

令人迷惑的代数

$E=mc^2$，$A^2+B^2=C^2$，看起来很熟悉吧？对很多人来说，代数经常让他们大脑一片空白，因为它们的抽象让人常常产生消极的反应。其实大可不必如此。

代数到底是什么？

通常的定义不会和“字母和等式”差太远。但这样的表述无助于我们了解代数的本质，所以我们换一种说法：

代数是一种用符号代表数字的数学语言。

这并不复杂。我们经常用符号表示很多东西：条形码、线框图、对勾、十字、箭头等，那么，为什么不能用a、b、c代表数字呢？

通用系统

代数让我们能够超越一个数字或一组数字的局限，从一个更为宽广的角度思考数字的规律。比如，你还记得“想一个数字……”的数字游戏吗？这些游戏的结果永远都在我们的掌握之中，但是为什么呢？我们试试下面的例子：

- 想一个数字；

- 把它加倍；

- 加6；

- 除以2；

- 减去你想的数字；

- 答案是3。

但答案永远是3吗？我们如何证明这个游戏对所有的数字都有效呢？是不是有些特定的数字就不符合这个规律呢？我们可以运用一些基本的代数知识来解决这个疑问。

让我们用x来代替任何具体的数字。

● 把x加倍得到2x（2乘以x，或者2个我们成为x的东西）；● 加6等于2x＋6，注意不是加6个我们想的数字（这会是6x），我们就是按照游

戏要求的加6; • 除以2，这就是说把2x＋6的每个部分都减半。2x的一半是x，6的一半是3，所以2x＋6的一半是x＋3; ● 最后，我们要减去我们想的数字，这一步是游戏的关键。我们只需简单地把开始想的数字去掉，也就是那个我们称之为x的数字，把x从x＋3去掉就得到3。我们从没有说哪个数字，得多大，这证明不管x是多少，我们的招数都会成功。

为什么代数如此重要？

用一个通用符号代替具体数字的作用十分强大，因为它允许我们在所有情况下去问："如果……又怎样？"或者像数学家们通常所说的变量。代数是微积分的基础—数学领域的一项重大进步，打开了通向工程学和物理学的诸多可能。没有代数，我们永远不可能登上月球，制造飞机或者电脑。

让数学家高斯名声大振的事件之一是他关于"西瑞思小行星"的位置预测。1801年，当这颗失踪已久的小行星重新被人们发现时，就是出现在当时高斯用代数方法预测的位置上。

方程式

方程式是代数非常核心的概念，却常常被人诟病。在最简单的方程式中，它就是两个或更多的表达方式有着相同数值的意思。解方程，即求出符号所代表数值的过程。数学家们经常惊叹方程式之美，尽管有时它们是让人头痛的，但无论如何，它是一个探索真理的过程，非常确定并充满逻辑，让很多人为之着迷。

史上最牛方程式：费马定理

20世纪最被关注的方程式莫过于费马定理。17世纪的皮埃尔·费马（Pierre de Fermat,1601～1665，法国17世纪最伟大的数学家。—译者注）提出两数的平方和等于第三数的平方。

比如：

$3^2+4^2=5^2$

$5^2+12^2=13^2$

定理指出只有平方数才符合此定理，3次方或4次方都不可以。用代数的方式表述，当a和b为正整数时，$a^n+b^n=c^n$，只有当n＝2时才能成立。

但是如何证明这个定理却难倒了很多数学家，直到300多年后的1995年，才由英国数学家安德鲁·威尔（Andrew Wiles，于1993年6月证明费马定理。—译者注）士解出。费马自己曾写道：我确实有绝妙的证据证明这个假设的正确性，但是这页的留白太小，写不下。我们永远也不会知道他说的是否是真的！

费马方程式很好地说明了在一个美妙的数学等式中，简单性与复杂性是如何完美结合的。

关于进制

西方的数字系统是基于10的整数倍的，或者说是十进制的。我们都习以为常，但其实还有其他的进制体系。事实上，我们经常使用其他进制，有时甚至在不自觉地使用它们。

使用不同的进制

下面的算式，你可能看起来很眼熟。开始学习加法时，你就从个位开始相加，然后进位到左侧的十位，然后十位数字相加再进位到百位，每一次进位都是以10为进位标准。

2 5 8

1 7 7

4 3 5

1 1

但想想你是怎么把时间相加的，比如13小时25分钟和11小时50分钟：

小时 分钟

13 25

11 50

25 15

1

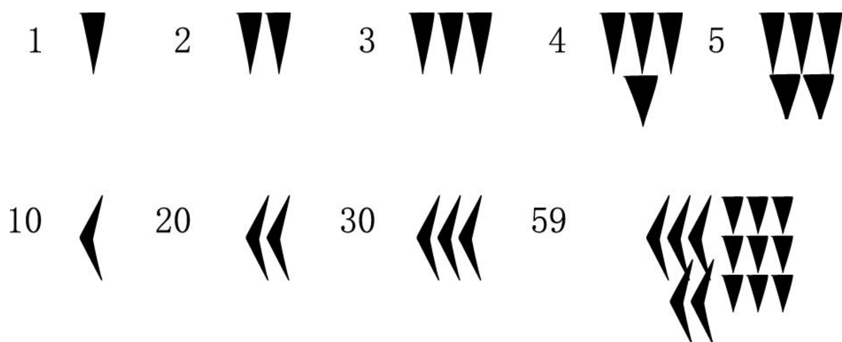
无论你是否意识到，你是以60进制为基础进行的计算，因为1小时等于60分钟。而且，如果你想用天来表述，你会转换到24进制，得到1天1小时15分钟的结果。

古巴比伦的数字体系

十进制需要10个不同的符号（包括无比重要的零，见后文）来表示不同数值：0、1、2、3、4、5、6、7、8、9。古巴比伦人用60进制的数字体系。他们用不同的符号表示1到10，但11的符号就是把1和10的符号放在一起。最大的59由50（5个10）和9（9个1）的组合来表示，很有逻辑性，并且已经包括了十进制的一些基本概念。

为什么选择60这么大的基数？有个很明显的原因：60有很多的约数（1、2、3、4、5、6、10、12、15、20、30)，很容易被整除。

这个古老而长寿的进制揭示了为什么钟表要设计成60等份的圆形，而且用在几何和微积分的很多运算中，角度单位为“度”，且最大值为360度（60×6）。



尝试不同的进制

不同进制所使用的符号个数可能不同，但它们的工作原理都是相同的。它们都是按列（或数位）排列，最右边的表示的单位是1，然后是基数，然后每向左一位，都是右侧数位乘以基数所得，比如，十进制的个位是1，十位是1×10，百位是10×10；而三进制的第一位是3，向左第二位是9（3×3），第三位是27（9×3），第四位是81（27×3），依此类推。那么5进制的前4位是多少？

176如何用3进制的方法来表示呢？从三进制中比176小的最大的基数81开始，要知道每个数位的值是多少,只需要看剩下的数还能容纳多少个这个数位的基数：

176里有多少个81 2 81×2=162 还剩14 (176－162)	14里有多少个27 0 27对14来说太大了	14里有多少个9 1 还剩5 (14－9)	5里有多少个3 1 还剩2 (5－3)	2里有多少个1 2

因此，176用3进制表示为20112。

二进制

二进制在科学领域有着举足轻重的地位。因为只使用了0和1两个数字，因此可以用开或关，有或没有电脉冲来表示它们，这是所有电脑的基础。二进制的每一位分别表示1、2、4、8等。你可以试试：

（1）用二进制来表示5；

（2）二进制中的110在十进制中是多少？

第四章 日常生活中的数学

我们的生活里到处都是数字和计算：无论是算出买东西要找的零钱、制定一份家庭预算表、记录孩子长大了多少，还是丈量伴娘们的礼服需要的衣料。当你对数字越来越敏感时，你的兴趣会进一步被激发，因为你发现数学充斥着从股票市场到车载导航系统的每个生活角落。

我们经常面临一些需要认真思考的问题：特价销售真的像它说的那么好吗？怎样才能找出最好的贷款方案呢？各种不同的利率用金融术语来描述，意味着什么呢？做一只逃避现实的鸵鸟，而不是勇于直面数字背后的现实，将会使你失去很多好机会，甚至无法驾驭生活。

经济的规模效应

为什么在大型超市，商品的价格往往较为便宜？这主要是规模效应造成的。

设想从日本进口一辆车卖给客户。每次订车时，要付6000美元给车厂，1000美元运费，1000美元的进口执照费用和1000美元的仓储费用，所以每辆车我要收顾客9000美元（单位成本）才能不亏损。但是如果有4个客户，他们可以分摊运费、执照费用和仓储费用，这意味着4辆车的总成本为27000美元，而单位成本—总成本除以单位数（4）—下降到6750美元，节约了2250美元或25%。

正是由于这种大规模的成本分摊，让大型采购商比小采购商更有能力频繁进行削价竞争。也许运1000个洋娃娃到地球的另一边从财务上说不可行，但是如果是价值几百万的货物贸易，能从单价较低又能提供大量货物的国家进口，即使加上运费，也能形成规模效应。

大宗交易也会使你拥有“购买控制权”。大型超市现在采购超过总产量80%的食品，农民愿意以较低的单价销售给它们，因为它们的采购是稳定而有保障的。

真的划算吗？

当你去购物时，最好时刻便是运用你数学智慧的最好时刻。如果预算紧张，你更要确保能找到最划算的交易。很多时候，商家会打出“不容错过”、“清仓甩卖”的招牌来吸引我们的眼球，让我们和钱说拜拜。但那些交易真的很划算吗？不全是的。我们在第二章所学的心算技能就能让你分辨出真假。

一个看起来很吸引人，而且越来越流行的促销方式是“买一赠一”。这当然很划算：花一份钱买到两样东西（如果你真的两个都需要）。

另一个促销方式是“买二赠一”，很多人会以为这和“买一赠一”差不多—都有一件免费商品。但是在你冲动消费之前最好先用数学的思维来考虑，最好的情况—你只能节约33%的成本。而且，如果赠品与你买

的商品并不相同，那么，商家很有可能是赠送一个更便宜的商品来促进正品的销售，那还得算算到底省了多少钱。况且，你是否真的需要那个赠品呢？再想想前面我们提到的百分比的变化会对你有所帮助。

这些促销未必都是假的，但是你在看到促销宣传时要保持清醒。

香肠和西红柿酱

今天你的孩子会邀请朋友到家里做客，你需要准备12根香肠和1公斤西红柿。附近商场有些促销活动：

商店	香肠	西红柿
A	39便士／根	26便士／100克
B	53便士／根（买3赠1）	49便士／200克
C	45便士／根（9折）	2.4英镑／500克（买1赠1）

请回答以下问题：

（1）去哪买香肠最划算？

（2）去哪买西红柿最划算？

（3）如果只能去一家店，选哪家？

条形码的秘密

你可能从来没注意过条形码。但这些条纹和数字却神奇地体现了数字世界中的隐藏信息。

条形码有其特殊的规则，最常见的是12位通用产品代码。一罐普通可乐和健怡可乐的代码不同，和6罐包装的也不同。每件商品都有自己独立的条形码，最大的12位数字是999999999999，即1万亿（一万个一亿，或者一亿个一万）减去一。

每位数字由4根条纹组成（白黑白黑），条纹的粗细决定数值。



上图中，9为校验和。

前6位表明产品产地和制造商。

后6位表明产品本身，由制造商确定。

条形码的巧妙之处在于第13位（通常在最左边），称为校验和。计算机读取时必须确认识别正确。你也可以试试这个工作原理：

- 第一步，把1、3、5、7、9、11位的数字相加乘以3；

- 第二步，把2、4、6、8、10、12位的数字相加，与上一步结果相加；

- 第三步，用10减去总和的个位数，应与校验和相等。

近似值

有时候，我们会被数学计算中的细节弄得头晕脑胀，而忘记了其实只需要近似值即可。一旦我们明白了这点，很多问题就变得容易多了。

透过数字看本质

当需要在现场计算时—比如决定要买多少油漆或墙纸，或付多少小费，很多人就晕了：我怎么才能算出那个的百分之多少呢？要把墙的尺寸转变成油漆的桶数，到底从哪里开始呢？其实，与其在细节中纠结，不如养成透过数字冷静地思考事情本质的习惯。

先问自己：我需要非常确切的结果还是近似值？通常我们需要的是后者。

假设餐馆账单是68.54元，你需要付12.5%的小费。看上去很可怕，但试着从近似值的角度去思考。账单大约是70元，10%的小费是7元，15%的小费是10.5元，那么12.5%就是它们的平均值，大概8.7元。（精确值是8.75元，所以你的近似值算法对于算小费足够用了。）

有机会时就练习这种估值技能，并用计算器检验你的估值有多接近。熟能生巧后，你对数字的估值就会有一种感觉，把一些数字估成近似的更容易计算的整数。

四舍五入？

通常情况下，我们会用四舍五入的方式取近似值（385精确到10位是

390，而不是380），但是到底采用哪种方法，近似到哪个最近的整数，有时我们也要依据具体情况判断：4816通常近似于4800，因为比到4900近，但是，如果只能有多估算的误差而不能少估算，如估算供给或者分配物资时，4850或4900可能是更为合理的近似值。

需要多近似？

差多少是可以接受的？关键是看数量级。数量级指的是数字的大小，数字越大，容错率越高。比如一个国家有59470877的人口，官方数字可能显示为59000000。这个近似值忽略了450000的人口，但它仅占总人口很小的比例，因此忽略不计也是可以接受的。那为什么不能近似到60000000呢？没有原因，这全看需要近似值的准确性要求。所以在不同准确度的要求下，4820、4800、5000都可以是4816的近似值。

需要多少油漆？

算出粉刷房间需要多少油漆是个漫长的计算过程：先要用墙的高度乘以房间地面的周长算出总的面积，然后计算每个门窗的面积，再从总面积减去所有门窗面积的和，最后再除以一桶油漆能粉刷的墙面面积，才能得到最终的答案。

一个有用的诀窍是用门作为你估算的向导。通常一个房间的门的面积是20平方尺或2平米，这不是精确的数值，但是这些近似数算起来要容易得多。油漆桶上一般会标明它能粉刷多大面积的墙面：通常可能是100平方尺／夸脱或12平米／升。所以1夸脱可以粉刷5个门左右的面积（1升可以粉刷6个门左右的面积）。现在你可以目测或张开手臂量出房间墙壁面积大概是门面积的几倍，从而得知你大概需要多少桶油漆。(忽视门和窗的空间经常很好地弥补了墙比门高这一事实对估算带来的影响) 另一种聪明的做法是用英尺量出房间的周长，把这个英尺数除以5，就得到你需要的油漆夸脱数（或者用米尺量，把得到的米数除以6就是所需油漆的升数）。你知道是怎么算的吗？

记得要多估一些，千万不能少估。还有，别忘了多准备一件工作服！

存贷款中的数学

你在计算存款和贷款利率的时候，是不是有点茫然？其实，它们不过是财务平衡方案公式的两边，都是基于基本数学规则的。

利率中的数学

借款人同意按事先规定的利率借给贷款人，他将分期偿还一部分本金和当期利息。借款人一定要规定借款年利率，并以此来计算还款额。如果你借了100美元，年利率为18%，那么利息是固定的。如果是单利，一年内你没有偿还，你就欠了118元。

但是，这个很好理解的概念，会因为两个因素而变得复杂。

一个因素是，如果你在借款期间就开始有规律地偿还一部分本金，那么，随着你欠款的减少，你所欠的利息也会逐渐减少。

另一个因素是复利。设想一个存款账户的年息是如广告中所说的极为诱人的12%：如果你投资100元，到年底时你会得到多少？如果是单利，你将有112元；如果是按月复利计息（几乎所有的存款和贷款都是用这种方法记息），你的收益将会更好一些。

月	存款	利息	余额
1月1日	$100.00	$1.00	$101.00
1 月底	$101.00	$1.01	$102.01
2 月底	$102.01	$1.02	$103.03
3 月底	$103.03	$1.03	$104.06
4 月底	$104.06	$1.04	$105.10
5 月底	$105.10	$1.05	$106.15
6 月底	$106.15	$1.06	$107.21
7 月底	$107.21	$1.07	$108.29
8 月底	$108.29	$1.08	$109.37
9 月底	$109.37	$1.09	$110.46
10 月底	$110.46	$1.10	$111.57
11 月底	$111.57	$1.12	$112.68
12 月底	$112.68	$1.13	$113.81

如果复利计息，年利率会被除以12得到月息。以我们上面说的虚拟账户为例，就是1%，每个月都把这部分利息加到你100美元的初始本金中，意味着用来挣利息的投资本金在逐月增加，也就是说，你的利息也产生了利息。

表中显示了复利是如何工作的。你会发现，最终结果比按单利计算最后得到的112元要多一些。

计算利息

有个简单的复利公式：$F=P\times(1+i)^n$。 F代表最终的余额，P代表本金，i代表利息，n代表投资年限。n次方表明括号内的和要不断地和自己相乘n次，所以 $(1+i)^3$ 也就是$(1+i)\times(1+i)\times(1+i)$。用这个公式判断下面两种情况哪个的投资回报更高。

（1）400欧元复利计息，年利率为5%，投资3年。(提示：$1+i=1.05$)

（2）380欧元复利计息，年利率为4%，投资5年。

分期付款的陷阱

当你购买洗衣机、沙发或汽车的时候，你会发现销售人员经常会诱导你进行分期付款。开始，你可能觉得不可思议：商家为什么不让顾客一次性付清来获取更大的利益呢？答案在于那些商家从分期付款得到的手续费。尽管分期付款看起来比一次性付款有更大的吸引力，但你需要有一定的技能才能了解它是否真的适合你。

除非是真的免息分期付款（确实比一次性付清划算），在其他情况下，你要学会计算总共需要支付的贷款本息。首先，弄清楚年利率，然后根据图表算清比商品售价本身多付的利息总和。

越快付清越好

销售人员总是告诉你，分期付款时每期的数额可以轻松承受，但这真的是一笔好买卖吗？你需要快速计算出它的真实总成本（或者估算一下）来节约你宝贵的现金。

当你计算按月分期付款时，可以用以下步骤：

1 算出一年的年利率。一个简单的心算方法是：在每月付款额后加个0，然后再加两个月的付款额，即为全年的付款总额。

2 最常见的分期付款期限是36、48或60个月，也就是3、4或5年，把每年的付款额乘以3、4或5，算出需偿还的本息总额。

3 用总额减去产品售价，你会看到差额即是你分期付款的代价。

你会惊奇地发现，这个算法很有用，你竟然比敲计算器的销售人员算得还快！

别忘了每月还款额的微小差异会带来总付款额的巨大不同。最近，当我准备签署一份汽车的贷款协议时，我发现了月还款条款中的一个小错误，尽管差额只有每月不到10英镑，但最终我要多付将近300英

镑。你能算出我的贷款年限吗？

交易中的数学

富时指数、道琼斯、纳斯达克是我们耳熟能详的词汇，数学又是怎样影响它们的呢？我们都听说过股市的大起大落，但很少有人明白其中的原因。比如，你是否听说过，绝大部分的交易都不是在交易别的，而仅仅是承诺？

股票价格通常用点来表述，在美国，1点即1美分，而在英国，1点就是1便士。交易者买卖看涨的股票，希望在股票开始跌之前卖出。他们首先看正在考虑的股票最近的最高价和最低价，分别称为“压力线”和“支撑线”，依此来计算回报：风险概率。当股票价格上涨时，与最近高点之间的差值即为收益，与最近低点之间的差值即为风险。

假设最近高点是255点，最近低点是210点，当前价格为225点。那么潜在收益为30，潜在风险为15，回报风险率为30:15或2:1，谨慎的投资者一般在回报风险率高于3:1时才会出手。因此，这个案例对他们没有太大吸引力。

利润中的数学

下一个要做的决定是投资多少。每个投资应为总投资额的1%，这样即使投资失败（平均为一半可能性），也不会对投资者造成致命的打击。

如果你的一半投资都失败了，还能挣钱吗？还记得回报风险率吗？这就是说，如果坚持至少3:1的比率，每次成功的交易至少能得到3倍的回报。假设你交易了10次，7次失败，3次成功。如果每次交易都是你总投资额的1%，那么你失去了7%，而在成功的3次交易中赚了9%，因此，总体上你赚了2%。

当然，这个算法不是对你的投资建议，因为没人能保证你肯定赚钱。不过，下次当你在市场中交易时，或许会对正在发生的情况有更好的了解。

金钱如粪土，撒播显用处。

—弗朗西斯·培根（Francis Bacon，1561～1626）

导航中的数学

自从人类开始环球航行以来，就需要确切地知道自己的位置和前进的方向。无论是以太阳、星星还是人造卫星为导航手段，都离不开数学计算。

传统方式

早期的水手或其他旅行者经常用固定的北极星或其他地标来计算自己的位置。后来人们发明了三角测量的定位方法，使方向定位更准确。

当远离陆地时，唯一能经常见到的事物就是太阳和星星，当然，它们的位置随着昼夜而变化。确信太阳在正午达到它的最高点，让水手们可以计算出自己的纬度（南北方向上的位置）。但是，由于不知道经度（东西方向上的位置），直到18世纪中叶，越洋贸易和探险活动都受到了极大的阻碍。

当水手知道了准确的格林威治时间后，他们可以利用天体的位置算出当地的时间。把两个时间相减后再乘以15（每往东或往西15度就有1小时的时差），他们就可以精确地算出自己的经度。

找到经度

在海上计算经度，最关键的因素是知道准确的时间。但是在17、18世纪，摆钟很难在大风大浪中摇摆的船上准确报时，更别提经常变化的天气如温差对它的影响了。1714年，英国政府下令重赏能够解决这个连伽利略和牛顿也解决不了的问题的人。1755年，一位钟表匠约翰·哈里森在他的第四次尝试中，最终解决了这个问题。他的杰作，后来被称为H4的怀表，能够经受船上颠簸的恶劣条件，它的工作原理不是

钟摆，而且是有专门应对温度变化的机制。

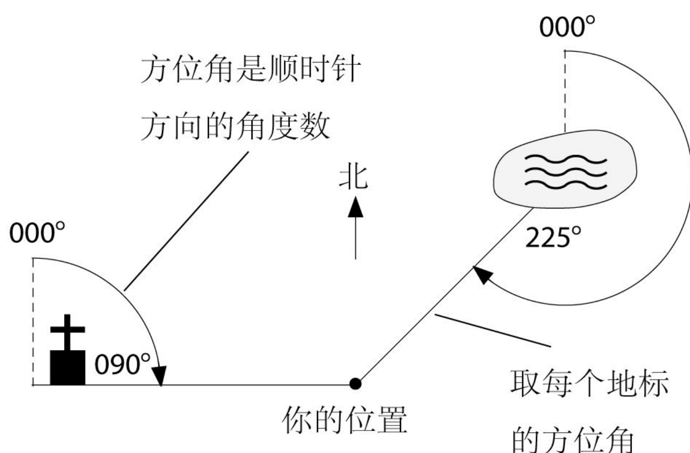
全球定位系统

尽管现代的高科技度量系统比远古的航海者们要准确得多，但用于定位地球上任意点的数学原理却相差无几。

全球定位系统（简称GPS)，其实就是更为复杂的三角测量系统—利用你相对于若干地球轨道卫星的相对位置来计算出你的位置（用更多固定点使定位更为准确）。不像哈里森的怀表，GPS中的微型集成电路芯片每秒钟可以运行数次。它有一个内置地图，它不仅给出经纬度，而且确切告知你在地图中的位置，其实它的工作原理和以前的完全相同。

找到你的方位角

地球上的任何一点都可以用经度和纬度定义。此外，你所面对或行进的方向称为方位角，它的单位是度，就像圆里面的角度。



假设你站在地面上一个大圆的中心面向北（12点方向），你目前的方位角就是000度（方位角都用3位数表示）；如果你向右转90度，你的方位角就变为090度。

你可以利用已知地标在地图上用方位角给自己定位。假设一座教堂在你的西侧，一个小湖在你的东北方。因此，你在教堂的东侧（方位角090度），在地图上标记一条从教堂向东的直线；再用相同的原理画一条从小湖向西南的直线（225度），两条直线相交的点就是你的位置。

第五章 数字：我们真的能相信它们吗？

通常情况下，数字是具体而值得信赖的，但有些时候，它们又显得变幻莫测。“统计数字就是谎言！”有人大声疾呼。但这并非数字的错，而是人们在特定情景下如何解释数字的问题。比如，50%本身毫无意

义，除非我们知道是什么的50%。误解统计数字的意义或对处理数字的恐惧可能导致我们轻信任何结论。

本章希望帮你认清一些真相，并让你了解，有时数学事实与你的本能假设是不一致的。

统计数字：我们应该相信吗？

人们对待统计数字往往有两种态度：全信或者根本不信。哪种态度更为健康呢？前者来源于无知，后者来源于恐惧，更好的选择是拥有质疑的思考能力，去判断数字究竟能告诉我们什么。

统计数字究竟能告诉我们什么

统计数字经常涉及百分比，以及更常见的百分比的变化。正如我们在第三章看到的，这经常会混淆人们的思维。由于懒惰或刻意误导，很多人引用数字时并不很严谨。比如，你在报纸上看到，每天多喝一杯酒会导致乳腺癌的发病率上升6%，这种表述足以让很多女性完全戒酒。但再深入思考一下，这额外的一杯酒只有极小的概率让女性患上乳腺癌。事实上，9%的女性在80岁以前会得乳腺癌，而9%的6%才0.54%（0.06× 0.09＝0.0054或者0.54%）。

原始的百分比即使很准确，也难以让人有直观的感觉，通常转换为每百人（或每千人）的表述方法更让人容易理解。比如，在刚才的例子中，每“200人中就有1人”比0.54%更明了，所以，以上事实更好的表述为（也不会那么骇人听闻）：“通常每200人中会有18人(或每100人中有9人)在80岁前得乳腺癌，如果她们每天多喝一杯酒，这个数字会上升到每200人中19个。”要经常对百分比到底意味着什么保持警觉，问问你自己：是什么的百分之几？

休假

当你看到这个标题时，是什么感觉？

工人们有40%的可能性在周一和周五休病假！

人们最常见的第一反应是点头称是：周一和周五确实是休病假的好机会，这样就能享受更长的周末了。

但现在让我们用数学的方式来思考。如果五天工作日中每天请病假的人数相同，那么在周一休息的人占百分之几？周五呢？40%这个数字看起来可能有点奇怪，因为它一点也没有显示人们更想在这两天休病假！

因果关系还是巧合？

另一个通常的误区是，如果A增加了，随后B也增加了，那么一定是A导致B。很多时候，A和B确实有联系，因此，人们很容易形成这个思维定式。有个很好的例子：在斯堪的纳维亚，研究人员发现，如果你的屋顶上筑巢的鹳越多，你的孩子越多。没有证据表明鹳的数量会和孩子的数量有因果关系，反之亦然。如果我们再仔细想想，你的孩子越多，可能房子就越大，因此能让鹳筑巢的屋顶面积就越大！这有点像把地球升温与猫王的模仿者近年的数量激增联系在一起。很多时候，我们容易误用数字。

数据采集方法

统计学家们经常采集很少数量的样本。尽管这可能和人的直觉很不一样，但通常情况下，采样的总体数量越大，为了达到一定的精确度，所需要的采样率就越低。比如，在保证采样过程足够随机的前提下，从500万人和100万人中随机采样500人的统计结果，基本不会有大的差异。

真正的随机性

通常随机性的概念是指在一个选取过程中，不偏好任一区域或任一类型。比如，从美国众议员中随机选取不应排除洛基山脉以西的任何

人；随机选取的一组衣物不可能都是袜子；买彩票的人以同等几率随机选取数字，因此很可能买跨度很大的数字，而不是一组相近的数字。但是随机性并不等同于均匀分布。设想一下，在正方形地砖铺成的地面上撒米，有些地砖上的米粒会多一点，而有些会少一点。这种对随机性本质的误解导致人们对于“癌症高发区”的恐惧：有些地方的癌症发病几率明显高于其他地区。事实上，完全不用担心，绝大部分所谓的高发区仅仅是随机数学事件，而不是真正的高危区域。

即使是统计学家也不认为统计学是一门精确的科学，公布的统计数据都会提供偏差率来表示统计数据到底有多可靠。统计学家在拥有较多的采样样本时，往往会宣称结果的置信度较高（也就是说，在多大程度上他们认为总体的结果会和样本的结果一致），从而降低偏差率。

偏差率

比如，一次调查统计宣称其偏差率是4%，这意味着如果把调查重复25次，平均来说会有一次的结果是完全错误的，也就是说，你所看到的结果有4%的可能是错误的！

偏差率对结果的解读非常重要。假设一位政治家第一次调查的支持率是46%，而在一周后再次调查时是48%，这并不一定说明支持率上升了。如果两次统计的偏差率都是3%，事实上，他的第一次真实支持率范围在43%～49%，而第二次的结果也落在这个范围中。

那么，我们能相信统计数据吗？

如果我们不是只看表面，而是按照正确的思路去思考，那么当然可以。当你看到一个百分比的时候，问自己是什么的百分之几，衡量的标准单位是什么，采集样本的规模和偏差率是多少，是不是还有其他的影响因素。这样，你将会更加自信地判断统计数据的有效性。

比例决定一切

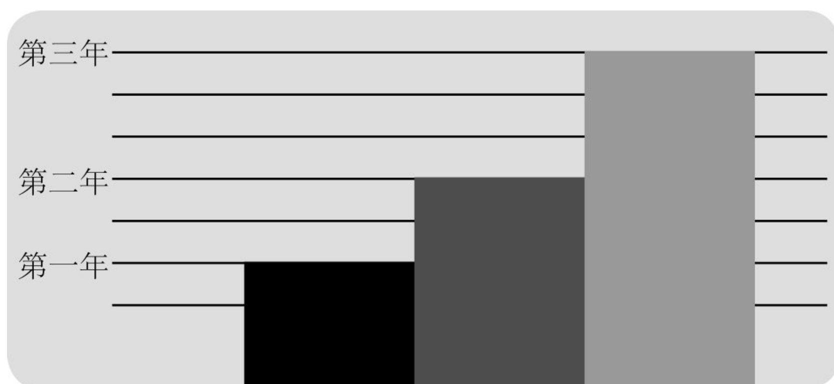
数字，尤其是涉及比较销售数据或预算的制定和执行情况时，往往用图表表示。饼状图、曲线图或柱状图都能使数字变得更容易理解，但很多时候它们也会误导我们。

读图表

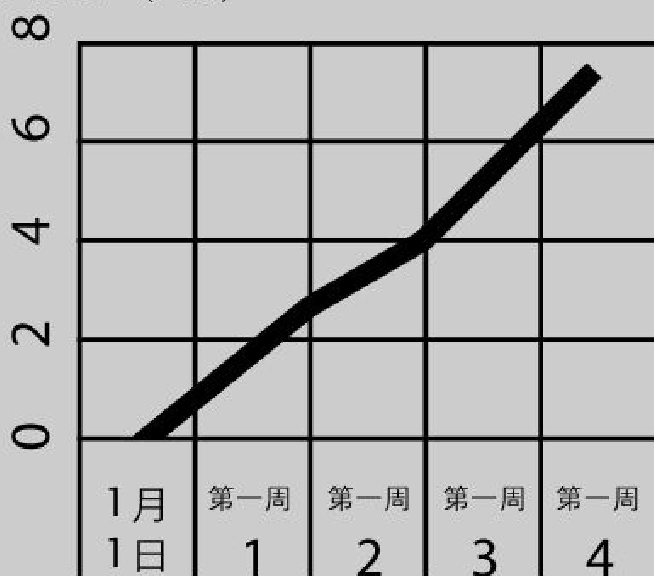
当面临一些数字低于预期的情况时，许多个人、公司，甚至政府都会选择统计数据“有倾向性的陈述”的手段。请看下页的销售图表，看起来，W先生制造厂的状况明显好于前两年—粗看上去产品销量倍增。

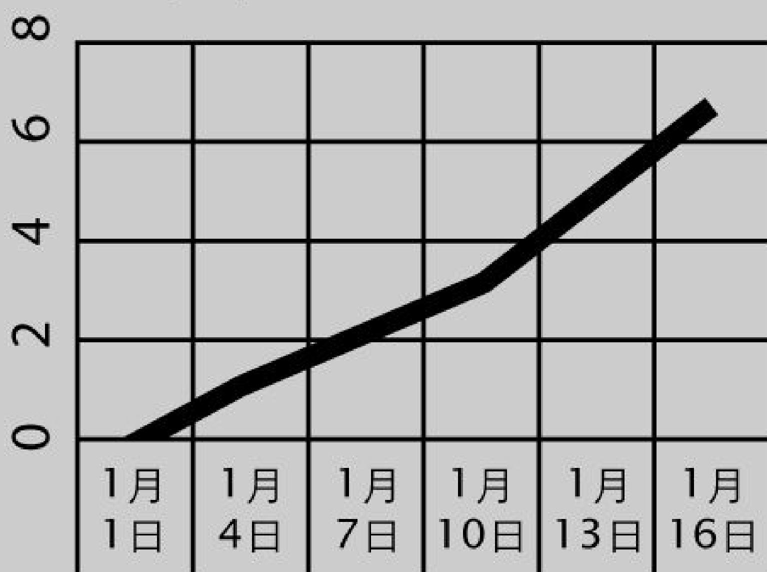
然而，有些情况下，省略纵坐标的起始刻度是最简单的。W先生只显示了销售图的顶部，而不是从0开始（本应如此）。如果销售图上的一条水平线代表100件产品销量，那么第一年的销售是5000件，而第三年的销量（5500件）只不过比第一年增长了10%而已。

图表的表述方式很容易被操纵，比如,可以操纵简单的图表来放大或缩小相对变化。类似的，饼状图貌似会给人一个全局的概念，但有时它也仅是整个故事的一部分。因此要仔细审核坐标线和数据的准确性，而不仅仅是看到图表的效果而已。



看看Annabel和Barbara的新年减肥计划表，谁的看起来更带劲一些？Annabel的曲线更为陡峭，好像她的进步更快。但当我们仔细看横坐标的时候，你发现了什么？实际的数字是不是和第一眼看上去的不一样？比如她们在1月15号的时候分别进展如何？


Annabel的减肥成绩
实减（磅）
8
6
4
2
0
1月
1日
第一周
1
第一周
2
第一周
3
第一周
4



机会和概率

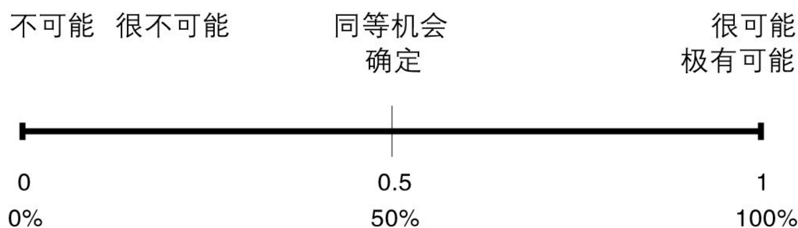
概率不仅用来决定赌马的赔率或买彩票中奖的机会，它在生活中比比皆是，比如，你出现意外或疾病风险的概率有多大。

概率统一体

概率是数学领域中最容易被误解的领域之一：它的法则并不那么显而易见，有时甚至完全违反直觉。

设想一条横线，左端点是0，右端点是1，我们可以把未来发生的事件

按照下面的方式放置到这个线段上的某一点：如果某事绝不会发生，它的概率即为0或0%；如果某事必然发生，它的概率是1或100%；其他所有情况的概率都会落在0和1两点之间。如果事件发生与否的概率相等（如掷硬币时正面向上的概率），那么它的概率就是0.5或50%。天气预报如果说下雨的概率是50%，那么就是说下雨和不下雨的可能性相等，这样的预报可真没用！另一个人们容易犯的错误是，1是10的10%，所以1是20的20%，事实上只是5%而已（1比20相当于5比100）。



概率是如何计算的？

某种事件的发生概率是用该事件可能发生的方式数除以所有事件发生的总次数。它比实际上听起来还复杂。设想你想计算掷色子大于4点的概率：

- 有几种大于4的可能？2（色子可以是5或6朝上）
- 一共有几种可能？6（色子可以是1、2、3、4、5或6朝上）

所以大于4的概率是2：6，或2／6，也就是1／3。因此，我们可以确信大约每掷三次色子会出现一次大于4点的情况。

为什么是大约呢？这来源于理论概率和实际测量值之间的重要区别。事件发生的次数越多，你的结果越接近理论概率值。如果你无限次地掷色子（当然在现实生活中不可能出现），那么5或6朝上的几率就确实是1／3—现实和理论一致，但如果你仅仅掷了几百次或上千次，那么，你只能说有很大的可能5或6朝上的几率大约是1／3。

这种可能性正是赌博（包括在股市交易）的基础。这也是为什么历史

数据可以作为预测未来的赛马结果或股票价格的重要参考值，但是并不能保证未来确定会发生什么。

概率法则在生活中发挥的作用远比你想象的大。比如，你的保险费计算，精算师通过计算某些特定事件发生的可能性，来评估你发生车祸或被入室抢劫的风险，并以此来计算保费，原理和预测掷色子哪个面朝上差不多，但有更多的变量影响最终的计算结果。你的车险保费会根据你的年龄、车型和所在地区来计算，同时考虑不能因为报价太高而使客户选择其他保险公司，也不能因为报价太低而无法保障因损失造成的理赔。

相同生日难题

有些事情发生的概率和你凭直觉猜测的大相径庭，其中最著名的概率难题之一就是“蒙提大厅难题”（见106页）。我们这儿有一个直观的问题：一个大厅中有多少人的时候，可能出现有至少两个人生日相同的情况（也就是概率大于50%）？100，500？不，答案仅仅是23！怎么可能？

- 你和我生日在同一天的概率是1／365，而我的生日那天不是你的生日的概率是364／365，约为99.7%; • 第3个人的生日在剩下的363天的概率是363／365；

- 第4个人只有362／365（约99.2%）的机会和我们三人的生日都不同；

- 以此类推，第23个人有343／365（约94.0%）的机会和我们所有人的生日都不同。

计算两种情况同时发生的概率，我们需要把它们单独发生的概率相乘，比如掷硬币连续3次正面向上的概率是1／8（1／2×1／2×1／2）,即12.5%。

如果把所有的生日概率相乘：364／365×363／365×362／365……当乘到343／365时（第23人），答案为49.3%，正好比一半稍小一点，也就是到了可能有两个人生日相同的转折点。

人们犯错误的原因是，面对这个问题，多数人会不自觉地把问题设想成“大厅中有多少人时，更可能有人和我同一天生日”。这和原命题完全不同，但你能算出答案吗？

如果你的生日是7月1日，你和我的生日相同，那么这种情况又有多大概率呢？

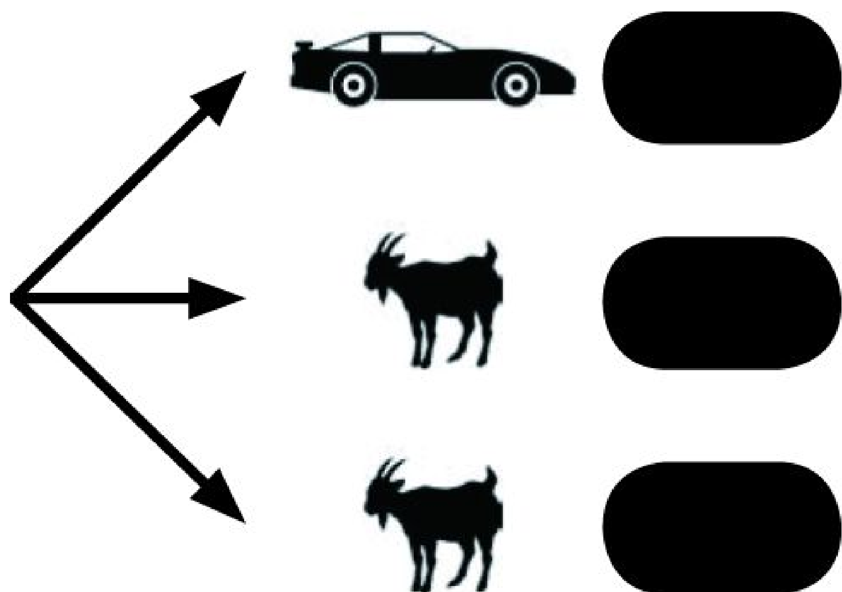
蒙提大厅难题

这是非常著名的以美国游戏秀主持人命名的统计难题，确实难倒了很多聪明人。

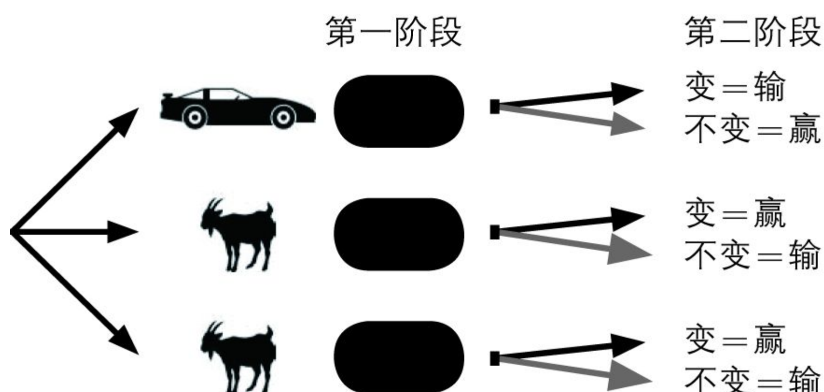
假设你在一个游戏秀现场，现在要你从3扇门中选中一扇大奖门：门后是一辆汽车，另外两扇门后是山羊。你选了1扇门，然后主持人（他知道哪扇门后是汽车）从另两扇门中打开一扇，让你看到山羊。这时你可以坚持原来的选择，或换成另一扇关着的门。如果你的决定变了，你的赢面是不是更大了呢？

直觉告诉我们：变或不变没有区别。毕竟现在还剩两扇门，一扇门后面是汽车，另一扇门后面是山羊，概率一定是50：50，是相同的。但事实上，你应该变，这样你的胜率会提高一倍！

最开始，你选择三扇门中任意一扇的可能性是一样的：



但到了第二阶段，根据你是否改变选择，情况变成了这样：



你可以看到，如果你不再坚持选山羊，你就赢了；如果你不再坚持选汽车，你就输了。但平均来说，你选三次，有两次可能是山羊，因此如果你改变的话，有2/3的可能赢。

你可以和一个朋友用三张扑克牌来尝试这个游戏，用1张A和2张大小王分别代表汽车和山羊。把3张牌面朝你散开，确保只有你能看到牌面。让你的朋友选1张，然后你把另两张中是王的那张翻开，再让他

选择是不是要改变想法换成另一张牌。最后翻开他选择的牌并记录每次他输赢的结果。如果玩的次数足够多，你会发现，他改变选择后赢的机会差不多是不变的两倍。

投注赔率

数学是一切赌博中投注赔率的核心。但是精通数学能让你在赌场里占优吗？还是纯粹就是看谁的手气更好？乐透是不是可怜的数学家们的又一道重税？

概率的均衡

下注和胜率都是概率的均衡。在轮盘赌中，选特定数字的赔率是最高的，但是出现这个数字的机会很小（1／36，在某些轮盘上是1／38）。猜奇偶数的成功概率较大（1／2），但是奖金低。博彩公司在设定赌马的赔率时也遵循一样的概率均衡法则，不过你可以根据赛马以前的表现做出更好的选择。

虽然有些种类的赌博要依靠技巧和经验，但其它更多时候靠的纯粹是运气。一个受很多人（虽然他们从不认为自己是赌徒）欢迎的赌博游戏大乐透就是如此。因为大乐透的运气因素和受欢迎度，让我们一起看看大乐透中的数学一定很有意思。

大乐透真的只靠运气吗？

所有的乐透游戏规则都很相似：你买一张彩票并选中一组数字，如果它们中的全部或部分与官方随机抽出的数字组相同，那么你就赢了。

在英国的乐透中（美国也差不多），总共有49个数字可供选择，意味着有13,983,816种机会均等的组合。因此，你中头奖的机会差不多有1400万分之1，真的不算大啊！

无论你的直觉如何敏锐，你都无法提高你赢的几率。但如果能赢，你

可以努力提高你的奖金数。关键在于你知道奖池里的钱是由所有猜对数字组合的中奖者共同分享的，设想你中了奖，却发现要和另外5000人分享奖金，是什么滋味。所以你能做的就是尽量挑选一些大众较少挑选的数字，这样当你中奖时，就能得到奖池中较大比例的奖金。

选一个数字，任何数……

人们往往会毫无逻辑地选择一些特定的数字组合，比如一些重要的日期或特别的数列（有好几千人每周都选1、2、3、4、5、6）。所以，为了减少奖金分享者，至少选一些大于31的数字，避免一些众所周知的组合，尽量随机选择数字。但是要记住，随机选择和等距离选择数字是两回事。事实上，从数学的角度来说，“随机选择”其实是自相矛盾的。

第六章 数字的奇迹

我们经常把数字看做达到某些目标的手段—就像一呼百应的平凡战士，有时枯燥但却是必须的手段。其实，数字也有它们自己的生命：它们以令人惊叹的方式相互关联，并深深扎根于很多让人觉得不可思议的自然现象中。

有些数字或数字之间的关系让从古至今的数学家们心驰神往。数学的疆域不仅包括我们都知道的实数，还有无理数，甚至虚数。数字的存在让我们得以探索更为广阔的宇宙奥秘。

0：有还是没有

哲学家们关于“无”是否真的存在有不同意见，但数学家们则从不怀疑。0是一个非常重要的数字，它的发明让更多数学领域中的探索成为可能。

在零出现以前

要体会0的重要性，让我们先来看看0出现以前尴尬的代数表达方法。在写一个10进制的多位数时，3有可能代表3、30或300，其他进制的数字就更为复杂了。为了解决这个问题，古巴比伦数学家用两个倾斜的符号来表示数字中间的一个“空”位置加图标，这个符号也叫占位符，这也是0沿用至今的一个重要功能。

0加入数字队列

以前“无”只是被看成“什么都没有”，直到印度数学家（而非人们通常误以为的阿拉伯或巴比伦数学家）在公元7世纪时发现0有它自己的数字属性，因此把它加入数字的行列，并像一个数字一样运算（有时是，有时不是）。0还得到了自己的符号，它被阿拉伯商人广泛传播—因此阿拉伯人被认为是0的发明人。事实上，印度人、阿拉伯人、巴比伦人，甚至古希腊人都在0这一重要数学概念的发展过程中起到了重大作用。

无法解释的是，即使是在数学家中，0后来又失宠了。直到大约1000年后的17世纪，它才被重新使用。

0的故事

英语零zero这个词起源于梵文sunya，意思是“空”或“无”。这个数字随着在欧亚大陆贸易路线上的传播，渐渐得到了现在的名字。阿拉伯人把它叫做sifr（从这个词我们派生出cipher，一种密码）。然后这个词又变成拉丁文的zephirum和意大利文的zefiro，中世纪的威尼斯人最终把它简化为“zero”。

0是如何对数学做出贡献的？

除了有用的占位功能以外，当数学家们发现0是一个实数时，它立刻在代数中发挥了巨大的作用，尤其是用来解比以前更复杂的方程式。因为加0或减0并不会对其他数字的值产生任何影响，这就使数学家们可以更为便捷地去推算一些表达式，来解决当时还尚未证明的假说。而且对0的理解能帮助我们更好地理解有限和无限的概念，这极大地促进了微积分—近千年来数学领域最伟大的发现之一—的发展。

0的奇特行为

很明显，任何数值加减0都不会变：$6+0=6$，$1546-0=1546$，那么，乘和除呢？

任何数乘以0容易让人犯错误，但其实这是个容易掌握的概念：$8\times0=0$，因为“无”的八倍还是“无”。然而，除法却提出了一个有趣的挑战。

现在任何数除以0都没有意义。之所以说“现在”，是因为也许在未来的某个时候，某个聪明的数学家会找到一种新的思维方式来解决这个问题。但现在问问你自己：8里面有多少个0？当然不是0个，因为$0\times0=0$，但也不可能是8个，或任何其他个数。

如果0可以当除数，我们就会得出一些不合理的结论，比如：

$4\times0=5\times0$

这个等式是对的，因为两边的结果都是0，但如果我们把等式两边都除以0，就得出$4=5$……这明显是错误的。数学家们目前的解决方案，是把0作为除数时的运算定义为无意义和不可能的。

天气预报告诉你，明天的天气将比今天冷一倍，如果今天是零度，明天的气温是多少度？

埃拉托色尼的筛子

所有数字都有特定的属性。比如，所有的整数都有因子—能被它整除，没有余数。那些只有两个因子（自身和1）的数字称为质数，几个世纪以来，它们一直让数学家着迷。

早期的希腊人发现了质数，而希腊数学家埃拉托色尼（Eratosthenes，公元前276 ~ 公元前194）则发明了一个办法使质数变得非常容易发现。

- 埃拉托色尼先写出1 ~ 100的所有数字。

- 他划掉1因为它只有1个因子，所以不是质数。

- 他把2圈上（作为第一个质数），再把所有2的倍数划掉。

- 下一个没有被圈的数是3，必然是质数，圈上它，随后划掉所有3的倍数。

- 下一个没有被圈的数是5，必然是质数，圈上它，随后划掉所有5的倍数。

- 对7和后面的质数，重复这个过程。

数字1被划掉因为它只有一个因子——自身——因此不是质数

带阴影的数字是质数——它们仅有的因子是自身和1

划掉的数字不是质数，它们有3个或更多的因子

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
[redacted]	[redacted]	23	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	29	[redacted]
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	[redacted]	73	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	79	[redacted]
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

最后得到的结果如上表所示，所有质数都标有阴影，而合数则被划掉，这个表格称为埃拉托色尼的筛子。

这个过程准确找出了100以内的所有质数，这个方法也同样适用于寻找更大的质数，而且有了超级计算机的帮助，数学家们一直在寻找越来越大的质数。

质数的模式？

质数被定义为只有两个因子的数字—它自身和1。还有一点不太为人所知：除了2和3，其他所有的质数都比6的倍数多1或者少1。这个属性有一个非常巧妙的证明：简单地说，所有不是比6的倍数多1或少1的数字必然是2或3的倍数，按照定义不可能是质数。

质数既让人兴奋又让人受挫的一个特性是，它们没有任何可识别的规律。

数学家们对此极为好奇，为此悬赏100万美元寻求“黎曼假说”的证明。1859年，德国数学家博恩哈德·黎曼（Bernhard Riemann，1826～1866）提出了质数和非质数之间关系的假设，至今还是世界上最著名的尚未解决的数学问题。将来会不会有人能预测出下一个质数是多少呢？

质数安全性

质数因子的排他性让它们“坚不可破”，因为不能分成任何等份，因此在货币系统或度量体系中不能被用作基数。但是，这种属性让它们在信用卡和网络安全等商业应用中有极大的作用。

安全系统经常以一种“公共密匙系统”为基础，其理论根源是大质数的一个简单特性：两个质数相乘非常容易，把它们的积再分解为原来的两个质数则非常困难。但是这需要非常大的质数，通常情况下会使用20位或更大的质数来实现这个技术。这和电子锁的原理差不多，你可以把它锁上（用两个质数之积），除非有人知道这个答案—知道是哪两个质数相乘得到了这个不可思议的长数字—才能把它打开。这就是

电子传输信息保密工作的原理。下次当你发送电邮，使用私人电话或使用安全的网络购物时，别忘了感谢质数让你享受到的安全体验。

密码：数学之谜

自从人们使用书面交流以来，就开始重视交流的私密性—由此诞生了密码学（把信息翻译成密码）。很自然的，数学为许多密码的生成和破解起了巨大的作用。

数学乘积排列

最简单的密码系统是替换代码系统。它仅仅是用一个字母代替另一个，因此很容易被破译。比如，把26个字母写在两个纸条上并做成纸环，旋转其中一个或者两个一起旋转，使相同的字母不再对齐，两个纸环上的字母就会产生一一对应的关系。如果把一个纸环移动一个字母，结果如下表所示：

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A

如果我们希望送出的秘密信息是“MOUSE”，把每个字母替换成该字母在上图第一行位置下方的字母，M O U S E就变成了N P V T F。但因为只有26种可能性，这个代码极不安全。即使是把下方纸环的26个字母随机排列的代码系统，也很容易被聪明的破译员解开。

如果字母不是按顺序排列，并且纸环的旋转次数是变化的（不仅针对每条信息，而且针对每个要编码的字母），那么密码的安全性就会增强。比如，A可能有时代表B，有时则代表W。这是“谜题密码机”设计者的设计思路：用5个纸环替换系统：部分加密过程涉及选择哪三个纸环。这听起来简单，但从数学的角度来看，这些纸环可以有一百多万种不同的摆放方式，这让那个时代的大数学家们大费脑筋，靠着一点运气才最终破译了这个密码。（事实上，这个系统蕴涵着更复杂的机制来随机化密码以得到超过万亿种可能的组合！）

试试破解下面这个密码：

BRX DUH D QXPEHU ZLCDUG!

谜题密码机

如果没有数学家的帮助，很难想象盟军能够取得第二次世界大战的最终胜利。德军一直用他们认为无法被破译的谜题密码机发送各种军事情报，从来不担心这些情报会被盟军破解。由于破译谜题密码机极为重要，以阿兰·特灵（Alan Turing，1912～1954）为首的英国最好的数学家们在伦敦附近布里奇里公园一个高度机密的政府机构里夜以继日地进行密码的破译工作。经过众人的巨大努力，最终破译成功，为盟军做出重大贡献，同时在数学史上也大大推进了计算技术的进步。

蝴蝶效应与混沌理论

你可能听说过“蝴蝶效应”：南美洲一只蝴蝶扇动翅膀可能引发纽约的龙卷风。虽然听起来有些夸张，但却是混沌理论的一个绝佳例证。

如果怎样……那么……

简单来说，混沌理论是解释为什么随机事件会毫无缘由发生的一个数学分支。它的核心理念是在系统中的微小变化能够引起一连串不成比例的巨大后果。

20世纪60年代，一位名叫爱德华·罗朗斯（Edward Lorenz，1917～2008）的气象学家致力于研究能够预测天气的公式，他发现在他的原始数据中极微小的变化都会导致结果的巨大不同，并由此建立了混沌理论。

完美挥杆？

设想发球台上职业高尔夫球员的挥杆，可以帮助我们理解混沌理论。如果他以同样的方法挥杆10次，理论上10个球的落点应该完全一致。结果当然不是这样，这归功于一些细微的差别，如一丝微风，多了1／4英寸随挥，或者身体转动差了不到一度。这些因素中的任意一个都会使球的最终位置有很大不同。当然，如果两个或以上的因素同时发生，落点的差异就会更大。由于球对微小差异的敏感性，没有人能每次都准确预测球的落点。罗朗斯把这种现象称为“蝴蝶效应”。

好莱坞电影业对此很感兴趣，分别在1998年和2004年拍摄了《滑动门》（Sliding Doors）和《蝴蝶效应》（The Butterfly Effect），引发了大众的思考。如果你打开时光之门并改变了以前的一件小事情，你现在的生活会有多大变化呢？比如你没有在那个房间遇到你的另一半，甚至你的父母都不曾相遇。

因为罗朗斯是气象学家，所以他没有把自己的研究成果发表在任何数学期刊上，他把它们发到了气象学期刊上，这也是为什么数年以后数学家才发现了他的理论。从此，混沌理论被应用到天气预测、经济趋势分析和公共健康计划等很多领域的预测建模。

打破模式

罗朗斯推导出新的方程式来描述系统如何因为不可预测的细微变化而变化，又发现了更多让人惊奇的现象。方程式中的图形似乎从不重复，而是发展成为令人惊奇的分形图形。

“分形”（fractal）表示由多个部分组成的图形，而这正是这个数学的新兴领域所要研究的内容。分形不遵循传统的欧氏几何（如圆形、三角形等），而是自成一体，引人入胜，其基础是不同尺度的无限重复。我们将在后面的内容中讨论这个与众不同的模式。

发现分形

尽管早在17世纪，人们就发现了分形的概念，但直到1975年，法国数学家伯努瓦·曼德勃罗（Benoit Mandelbrot，1924～）才首次使用“分形”这个词来描述他在数学的显微镜中发现的看起来总是一样的图形。这是因为，每当我们放大一个图形的时候，我们发现它们是在更小的尺度重复相同的形状。

自然界中的复杂图形

你是否研究过蕨类植物？每片复叶都由很多小叶组成，而每片小叶就像是复叶的微缩版本。再凑近一点，你会发现，每片小叶都是由更小的小叶组成，而且它们看起来都和复叶几乎一样。



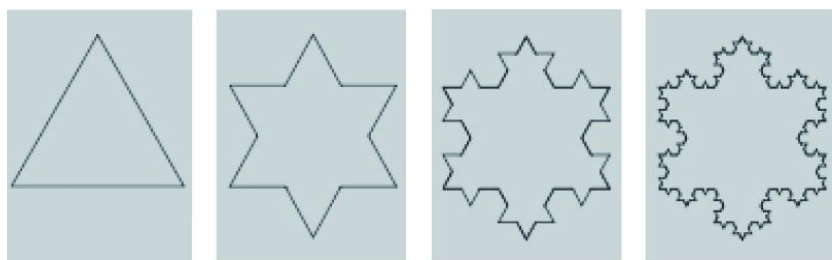
另一个很有名的例子是雪花。雪花的花瓣很像分形的模式，花瓣的形状在不同的尺度被复制，因而这些形状在任意尺度看起来都很相像。

分形有一个令人惊奇的特性，传统的几何图形会有一个固定长度的周长，但它们没有。像科赫雪花这样的分形，其周长是无限的。要理解为什么会这样，想象从太空看冰岛，看起来像一个简单的椭圆，但是当你离得更近，你发现它的海岸线是由一系列更长的回旋状的海岬、内湾和裂隙组成。

科赫雪花

这个引人入胜的分形几何的例子其实起源于数学领域，而不是自然界。它得名于瑞典数学家海尔格·冯·科赫（Helge von Koch，1870～1924），他在1904年发现了科赫雪花。

从一个等边三角形开始，去掉每条边靠近中央的三分之一，用相同长度的两条边替换并组成一个新的等边三角形附着在原三角形的每一条边上。在新图形的每条边上重复同样的过程，然后再重复。这么做两次以后就得到了下图所示的进展图：



我们可以按照这个规则无限地拼贴下去。

这个特殊图形的精妙之处在于，无限重复的科赫雪花的面积正好是原始三角形面积的1.6倍。在重复加入新的三角形很多次以后，科赫雪花的面积（要利用等比数列计算，稍稍超出本书的范围）还保持在原始三角形面积的1.6倍以内。这里的逻辑假设是，尽管该图形的周长在无限延伸，但它所包含的面积却是有限的。

没有数字的世界？

设想当你购物时，不知道要付多少钱或找多少钱；设想你在任何需要记分的比赛中，发现要知道16比12大很难；设想你根本不懂数字时，如何准时去开会或控制开车的时速。

失算症和计算障碍

对有些人来说，数字几乎没有意义。失算症患者几乎无法数出哪怕是很少的一些物体。他们对数字的大小和相互关系无法理解：极简单的加法，或者按大小顺序排列数字，对他们都很困难。

失算症通常是脑部受损引起的，最常见的是中风，也可能是基因方面的缺陷影响了儿童对数字的理解。如果问题没有严重到完全失算，通常称为计算障碍。正如更为人知的阅读障碍、计算障碍的严重程度也有大小之分。“数字盲”并不总能用基因缺陷来解释，但是真正的计算障碍经常会带来挫败感，我们的生活处处都是数字。关于计算障碍的研究还在进行，希望将来我们能够更好地理解为什么大部分人对数字近乎本能的反应对这些患者却如此困难。

虚数的世界

我们已经见过一些抽象的数字，比如pi（p）和phi（f）。在数学的世界中还有一些更为奇特的，甚至不真实的数字，比如i。

虚数的i

当你把一个数字乘以它本身，就得到它的平方，比如，5 × 5 = 25；它的逆运算是平方根，所以25 = 5。你可能记得学校中也教过两个负数

相乘积总是正数。那么，想想这个：如果1×1＝1，（－1）×（－1）＝1，那么－1存在吗？

事实上，答案是肯定的。几个世纪以来，数学家们不断在复杂的方程式中发现－1的存在。因为这些方程式有一个真实、具体的答案，－1必须以某种形式存在。18世纪时，－1被命名为i，所有这些数字（其他负数的平方根）被统称为虚数。承认它们的存在推动了物理、工程和电力领域的发展。如果没有i，就不会有电脑、汽车或手机的发明。

虚数是神灵遁迹的精微而奇异的隐避所。

－戈特弗里德·威廉·莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646～1716）

答案

第一章

P8: 5、V或五

1 2。对应关系是指色子相对的各面数字。

2 5550.55－500.55＝5050; 其他等式结果都是5。

3 温度换算中。5摄氏度＝41华氏度（5华氏度＝－15摄氏度）。

P19：上道了吗？

1 a:3366。（3400－34）

b:27.93。（先做乘法4×7得到28，然后减去7个0.01）

2 a:300。（150里有300个半个）

b:1000。

3 100×100 = 10000。

4 它们是相同的温度。16摄氏度＝61华氏度；28摄氏度＝82华氏度。

5 a:403。（第n项是4n＋3）。

b:第49项。

6 237.6和340

从13开始 143 144 12 1188 118.8 237.6

从340开始 170 85 17 68 340。最后又回到了开始的数字，因为在运算过程中先除以20又乘以20，各个运算步骤相互化解了。

7 32145。（这是个拉丁方块，见15页）

第二章

P31: 链式速算

从20开始 2 4 48 14 42 6 36 3564

从7开始 49 539 100 10 2 8 64 70

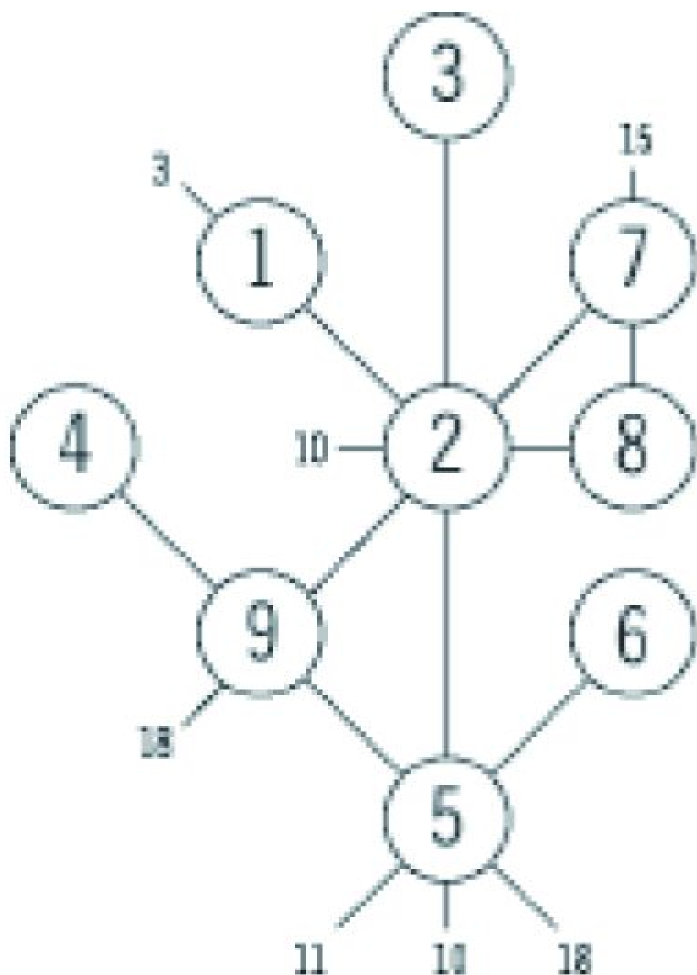
P32：数列填空

A 8。（把前两个数相乘减2得到第三个数）

B 3。（第三个数是前两个数之和的两倍）

C 19。（第三个数是第一个数的平方加第二个数）

P32：交叉线图



P33：数谜

			16\	17\	14\			23\	24\
		18\18	7	9	2	25\	\16	7	9
	9\28	7	9	8	3	1	\17	9	8
\17	8	9		31\17	8	9	17\8	1	7
\3	1	2	17\20	3	1	2	8	6	
		13\16	9	7	30\17	8	9	24\	16\
	24\31	2	8	9	7	5	\16	9	7
\8	7	1	\17	8	9	16\	17\17	8	9
\16	9	7	\34	4	6	9	8	7	
\11	8	3		\24	8	7	9		

第三章

P53：通过比例理解大数

1 棕色和黑色蝙蝠的比例是30：20即3：2，因为200是4×50，两边各乘以4，所以30×4 = 120只棕色蝙蝠。

2 先求出共有多少份5 + 6 + 7 = 18。90÷18是5，因此每份有5颗糖

果。所以威廉得到25颗（5×5），托马斯得到30颗（5×6），瑞贝卡得到35颗（5×7）。

3 求出血清在血液中的比例，从血液的总数（100%）中减去血细胞的比例（45%）。100% - 45% = 55%。

血清：血细胞的比例是55：45，两边各除以5，约简为11：9。

P70：二进制

1 101；

2 6

第四章

P77：香肠和西红柿酱

1 A店的香肠总价最便宜：39便士×12是4.68英镑；

在B店，12根香肠只需要付9根的钱，但是每根是53便士，总价是4.77英镑；

在C店是总价打9折。45便士×12是5.40英镑，即便打9折还要4.86英镑。

2 C店的西红柿酱最便宜：一公斤只需要2.4英镑；

在A店要买10×100克，总共需要2.6英镑；

在B店要买5×200克，就是2.45英镑。

3 有趣的是，如果两样东西一起买，在B店最便宜：只要付4.77＋2.45＝7.22英镑。

（在A店要付4.68＋2.6＝7.28英镑；在C店，总数是4.86＋2.4＝7.26英镑）

P85：计算

你会得到两个很相似的结果：

1 463.05欧元。400×1.053（就是1.05×1.05×1.05）

2 462.33欧元。380×1.045

第五章

P106: 相同生日难题

某个人和你生日不同的概率非常高：364／365，或0.99726,第二个人也和你生日不同的概率有所下降：364／365×364／365或者（364／365）^{2}，大约是0.99453，依此类推，到第253人时概率下降到（364／365）^{253}，大约是0.499523，减到了0.5以下。看起来有些反常，但这确实证明了大厅里至少需要253人，才能说更可能有人和你一天生日。

你有多大的几率和我同一天生日（7月1日）？这个就简单多了，你有1／365的几率和我一天生日，因为你在一年中任何一天出生的几率相等。（简便起见，我们不考虑闰年的情况）

第六章

P116: 零的奇特行为

天气预报员本意是说明天的天气将会更冷，但从数学角度来看，0×2 仍然是0。

P121：数学乘积排列

为了破译这组密码BRX DUH D QXPEHU ZLCDUG!，你需要把每个字母都在字母表中向前移动4位，所以D变成A，C变成Z，B变成Y，依此类推。这样做以后就得到了答案：

YOU ARE A NUMBER WIZARD!

财富会帮助那些有良好判断力的人。

—欧里庇得斯（Euripides，公元前480～公元前406）